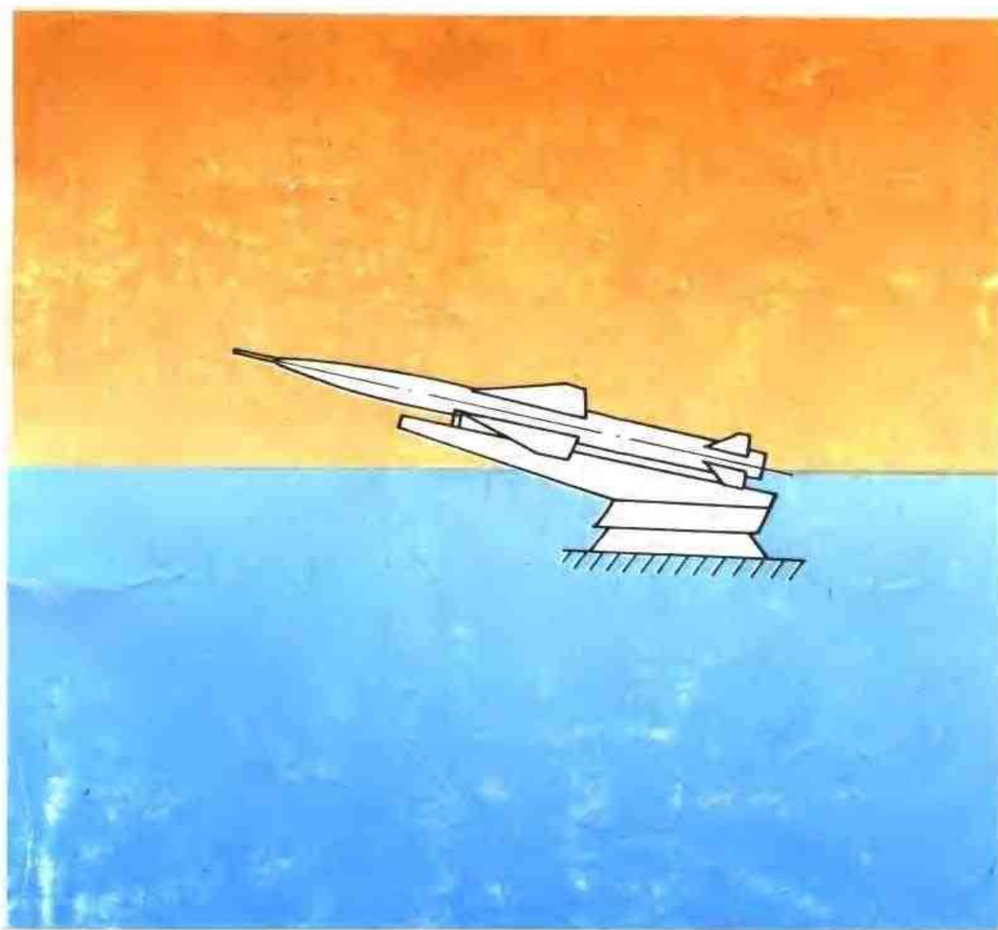
高等学校教材

飞行器结构动力学

余旭东 赵育善 编



西北工业大学出版社

33567903

高等学校教材

33567903

飞行器结构动力学

余旭东　赵育善　编



HK62/08


C0394450

西北工业大学出版社
1998年7月　西安

（陕）新登字 009 号

【内容摘要】 本教材介绍飞行器（飞机、火箭、导弹、卫星等）结构动力分析的基本理论和基本方法。全书共分 13 章，主要内容包括：振动的基本理论；飞行器结构的固有特性分析；飞行器结构的动态响应分析。书中除了包括基本理论与解法之外，还结合飞行器设计工程问题介绍了处理与之相关的特殊问题的原理与方法，如分离面（接头）对飞行器固有特性的影响、储箱中液体晃动对固有特性的影响、弹--架联合系统的响应分析、响应谱与动环境预测等。在附录中还给出了 5 个典型计算机程序。

本书可作为航空院校飞行器结构动力学课程的教材，也可供从事飞行器振动分析、结构动态设计的工程技术人员和研究生参考。

高等学校教材
飞行器结构动力学
余旭东　赵育善　编
责任编辑　王俊轩
责任校对　齐随印
*
©1998　西北工业大学出版社出版
（邮编：710072　西安市友谊西路 127 号　电话：8493814）
全国各地新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7－5612－1033－7/V・27（课）
*
开本：787×1096 毫米 1/16　　印张：17.5　　字数：423 千字
1998 年 7 月第 1 版　　　　1998 年 7 月第 1 次印刷
印数：1－1 000 册　　定价：20.00 元

购买本社出版的图书，如有缺页、错页的，本社发行部负责调换。

序　言

《飞行器结构动力学》是航空、航天院校有关专业的一门必修专业课的教材，也是广大航空、航天结构动力分析工作者必备的重要参考书。本书在阐明振动基本理论的基础上，着重讲述飞行器振动固有特性计算的原理与方法，飞行器结构动态响应分析的原理与方法。除介绍一些经典方法外，对近年来广泛用来解决复杂结构动力学问题的成功方法，如有限元素法、传递矩阵法、有限元—传递矩阵联合法、子结构模态综合法、直接积分法、模态叠加法等，也给予了充分的介绍，并且紧密结合飞行器振动设计的一些特殊问题，介绍了有关分析原理与方法。

本书包括单自由度理论、多自由度理论、连续体理论、飞行器结构固有特性分析、飞行器结构动态响应分析等方面的内容。由于考虑到本书的研究对象侧重于飞行器结构，对振动理论基础部分只做重点阐述，不过分追求振动理论的系统性与完整性。

阅读本书，要求具备理论力学、结构力学、线性代数、矩阵理论、有限元素法、复变函数、数值分析等基础知识。

本书第一章到第四章由西北工业大学赵育善执笔，其余各章节与附录由余旭东执笔。全书承蒙和兴锁教授精心审阅，对原稿提出了许多宝贵意见，对此我们深表谢意。由于水平所限，书中难免有错误与不妥之处，衷心希望读者提出宝贵意见。

编　者

1998 年 3 月

目　　录

第一章　绪论……………………………………………………………… 1

§1.1　飞行器结构动力学的目的与内容 ………………………………… 1
§1.2　动力问题的基本特性 ……………………………………………… 2
§1.3　基本研究方法与分析模型 ………………………………………… 3
§1.4　振动的分类 ………………………………………………………… 5
§1.5　简谐振动 …………………………………………………………… 5

第一篇　振动理论基础

第二章　单自由度系统的振动 ………………………………………… 12

§2.1　前言…………………………………………………………………… 12
§2.2　无阻尼自由振动……………………………………………………… 12
§2.3　有阻尼自由振动……………………………………………………… 17
§2.4　周期激励的强迫振动………………………………………………… 20
§2.5　任意激励的强迫振动………………………………………………… 30
§2.6　阻尼理论……………………………………………………………… 35
习题 ……………………………………………………………………… 37

第三章　多自由度系统的振动 ………………………………………… 40

§3.1　前言…………………………………………………………………… 40
§3.2　运动方程的建立……………………………………………………… 40
§3.3　无阻尼自由振动……………………………………………………… 48
§3.4　半正定系统…………………………………………………………… 59
§3.5　瑞雷-李兹法 ………………………………………………………… 63
§3.6　系统对初始条件的响应……………………………………………… 67
§3.7　多自由度系统的阻尼………………………………………………… 69
习题 ……………………………………………………………………… 73

第四章　连续系统 ……………………………………………………… 77

§4.1　前言…………………………………………………………………… 77
§4.2　杆的纵向振动………………………………………………………… 77

§4.3　梁的横向振动…………………………………………………………… 79
§4.4　矩形薄板的横向振动………………………………………………… 86
习题 ………………………………………………………………………… 89

第二篇　飞行器结构固有振动特性分析

第五章　有限元素法与特征值问题 ………………………………………… 94

§5.1　结构动力有限元法理论与模型…………………………………… 94
§5.2　逆迭代法 ……………………………………………………………… 101
§5.3　广义雅可比法 ………………………………………………………… 104
§5.4　多项式迭代法与斯图姆系列法 ……………………………………… 106
§5.5　行列式搜索法 ………………………………………………………… 108
§5.6　子空间迭代法 ………………………………………………………… 112
习题…………………………………………………………………………… 116

第六章　传递矩阵法………………………………………………………… 118

§6.1　基本理论与方法 ……………………………………………………… 118
§6.2　RICCATI 法…………………………………………………………… 126
§6.3　轴向力与气动力对固有特性的影响 ………………………………… 128
§6.4　传递矩阵法的一些特殊问题 ………………………………………… 130
习题…………………………………………………………………………… 133

第七章　有限元—传递矩阵联合法………………………………………… 134

§7.1　联合法的基本原理 …………………………………………………… 134
§7.2　一些特殊情况的处理 ………………………………………………… 137

第八章　子结构模态综合法………………………………………………… 140

§8.1　基本原理 ……………………………………………………………… 140
§8.2　模态变换阵的构成选择与截断 ……………………………………… 143

第九章　飞行器固有特性分析的一些特殊问题…………………………… 149

§9.1　飞行器分离面(接头)对固有特性的影响 …………………………… 149
§9.2　具有旋转部件的飞行器的固有特性分析特点 ……………………… 151
§9.3　贮箱中液体晃动对固有特性的影响 ………………………………… 155

第三篇　飞行器结构动态响应分析

第十章　动响应分析的时间域法……………………………………………… 162

§10.1　前言……………………………………………………………… 162
§10.2　直接积分法……………………………………………………… 162
§10.3　模态叠加法……………………………………………………… 169
§10.4　状态空间法……………………………………………………… 172
§10.5　方法的选择……………………………………………………… 173
习题………………………………………………………………………… 175

第十一章　动响应分析的频率域法…………………………………………… 181

§11.1　前言……………………………………………………………… 181
§11.2　传递函数的基本概念…………………………………………… 181
§11.3　传递函数法动响应分析原理…………………………………… 183
§11.4　传递函数的确定………………………………………………… 186
§11.5　传递函数法解飞行器动态响应………………………………… 189
习题………………………………………………………………………… 196

第十二章　响应谱与动环境预示……………………………………………… 199

§12.1　前言……………………………………………………………… 199
§12.2　响应谱(冲击谱)基本概念……………………………………… 200
§12.3　响应谱用于动环境预示………………………………………… 203
§12.4　响应谱用于动响应与动载荷计算……………………………… 206
§12.5　关于响应谱的一些问题的讨论………………………………… 208

第十三章　飞行器响应分析中的几个特殊问题……………………………… 213

§13.1　前言……………………………………………………………… 213
§13.2　弹—架联合系统响应分析……………………………………… 213
§13.3　舱体内部仪器响应分析………………………………………… 219
§13.4　具有动量轮的卫星结构系统频响特性分析…………………… 223

附录　典型程序……………………………………………………………… 227
参考文献……………………………………………………………………… 271

第一章 绪 论

§1.1 飞行器结构动力学的目的与内容

所谓振动，就是物体或某种状态随着时间往复变化的现象。无论是在装卸、运输还是在发射、飞行的过程中，飞行器都可能产生强烈的振动与噪声。如果设计不合理，这种振动会激发起飞行器结构或内部设备的共振，也可能引起颤振、发散等动力不稳定现象，使结构因动应力过大而破坏，或者使仪器受到过大的加速度而失灵。因此，结构动力学问题在飞行器设计中受到了普遍重视。在结构动力学中，凡是能产生振动的研究对象统称为**动力系统**，简称**系统**；而将引起系统振动的外界输入，如初始干扰、外激励力、位移激励等，统称为**激励**；系统在输入下产生的效果即为输出，如位移、加速度、应力等，统称为**系统的动态响应**，简称**响应**。显然，飞行器结构是一种典型的动力系统。飞行器结构动力学的目的，就是研究这种具体系统的振动特性和响应的分析方法与特点，以保证飞行器结构安全可靠、性能适当和具有足够的使用寿命。

设计中遇到的结构动力学问题主要有以下几个方面。

一、外激励的分析与确定

飞行器所处的动环境是比较复杂而恶劣的。这一方面表现在激励源多而复杂，其主要的激励源有发动机推力、射流噪声、附面层噪声、控制力、阵风、飞行阶段的转换（点火、发射、分离、熄火、着陆）、爆炸波激励以及运输、装卸造成的激励等等。这些激励有规律性的，也有随机性的。另一方面是由于实际环境往往有几种激励同时作用于飞行器上，因此，为了保证飞行器结构安全可靠，应该将飞行器承受动载荷比较严重的一些情况加以研究，分析这些外激励的性质、大小和变化规律，以确定设计时所必需的动载荷，作为结构设计的重要依据之一。例如，在设计运载火箭和宇宙飞船时，结构对起飞或助推发动机造成的冲击力、气动力及声激励的响应，通常是确定结构尺寸的重要因素。故在初步设计阶段，一般要反复进行激励环境预示和动载荷预示。

二、结构振动固有特性分析

无论是动态响应计算，结构动稳定性分析，还是结构与飞行器其他系统（例如控制系统、燃料输送系统等）的耦合干扰分析，往往都是以结构动态固有特性为基本的原始数据。固有特性分析的基本内容是，在拟定结构动态分析模型的基础上进行结构固有频率及其相应振型的计算。此项工作的分析精度在一定程度上影响着许多设计环节的有效性。

三、结构动态响应计算

在飞行器设计过程中，这项工作是反复进行的。其主要内容是确定结构在外激励下产生的

输出。这种激励和输出可以是力、位移或加速度。掌握这些参量在飞行器工作过程中随时间变化的规律,是对结构进行动强度、刚度及舱内设备空间余量设计的必要条件,同时也在很大程度上影响着舱内敏感元件固定方式与合理位置的规定等。因此,本课题是飞行器结构动力学中最活跃的研究领域之一。

四、气动弹性分析

此项研究的目的,是使飞行器避免发生可能的结构动力不稳定现象。这些现象中最有代表性的是颤振现象。当飞行器在飞行中受到外激励的作用产生振动时,随着弹性变形的不断变化,必然会引起附加的空气动力。在空气动力、变形所引起的弹性恢复力和振动所伴随的惯性力的联合作用下,当飞行速度达到某一特定值时,会出现空气动力面振幅迅速扩大而在几秒钟内导致破坏的危险现象。我们把这种自激振动称为颤振。动力不稳定现象是十分有害的,飞行器设计必须保证不发生这些现象。

此外,还有飞行器结构与其他系统的动力学耦合问题(如飞行器结构与推进系统耦合产生的POGO问题),保证飞行器乘员舒适性的问题,液体燃料火箭的燃油晃动问题等。图1-1表示了空间运载系统的某些典型结构动力学问题。

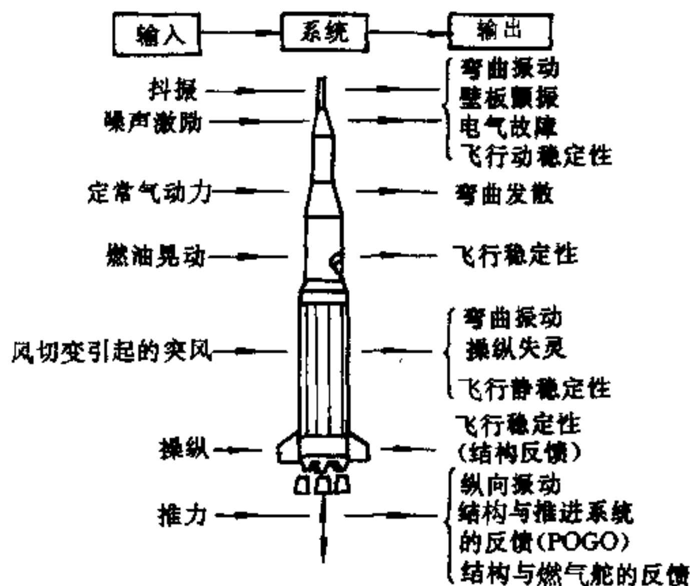


图 1-1

归纳起来,上述各种问题大致可以分为以下四方面的基本课题:

(1) 振动设计问题。即已知输入,要求设计系统的振动特性,使得它的动态响应满足设计要求。

(2) 动环境预测问题。即已知系统的动态特性和输出,研究其输入特性。

(3) 系统识别问题。即通过已知的输入与输出来识别系统本身的动态特性与物理参量。

(4) 已知系统特性和输入,求系统的输出,称为动力响应分析。它常常被用来为产品设计、消除有害振动等实际工程问题服务。

在处理实际工程问题时,上述各问题又交织在一起。本书的目的,是为读者提供飞行器结构动力分析的基本知识,着重阐述基本方法与基本理论,使读者初步具备分析、解决飞行器结构动力问题的能力。所涉及的内容仅限于动力固有特性分析与动力响应分析。

§ 1.2 动力问题的基本特性

动力问题的基本特性主要表现在两个方面:

在动力分析中，输入(激励)的大小、方向甚至作用点，一般都是随时间而变化的。这就决定了动力系统的输出(响应)也随时间而变化。这时，结构的内力、变形除了与载荷大小有关外，还与载荷作用方式、它随时间的变化规律以及结构的固有特性、阻尼特性有关。因此，对于动力学问题，不仅要知道边界条件，而且要知道初始条件。显然，时间变量是结构动力问题的基本变量之一，这使得动力分析比静力分析更加复杂。

2. 惯性力的存在

结构动力问题的突出特征是振动现象。振动中的质点具有加速度，从而在结构中产生了惯性力。如图 1-2(a) 所示，简支梁在动载荷 $P(t)$ 作用下所产生的梁的位移与加速度有关，梁中的弯矩、剪力不仅要平衡外载荷 $P(t)$，而且要平衡振动中梁的加速度所引起的惯性力。可是，如果简支梁所承受的是静载荷，如图 1-2(b) 所示，则其弯矩、剪力及挠曲线形状在给定的边界条件下只取决于给定的静载荷 P。所以惯性力的存在是动力学问题的又一特性。由理论力学质点动力学可知，由于惯性力项的出现，使质点振动的运动方程为二阶常系数线性微分方程(在微幅振动条件下)，这也就在一定程度上确定了运动方程的形式和求解的特点。因此，在结构动力学中，必须十分重视结构的质量大小与分布情况，注意研究振动中惯性力的状况。

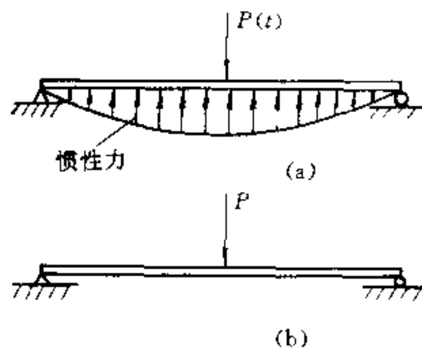


图 1-2

§ 1.3 基本研究方法与分析模型

结构动力学的基本研究方法是先确定外激励的性质、大小与变化规律，确定初始条件，再将飞行器的实际结构简化成分析模型，建立起相应的振动微分方程(运动方程)，即数学模型然后，采用合理的方法求解，并通过实验来验证所得解的正确性。

由于飞行器结构十分复杂，结构动力学同其他工程学科一样，不可能将原始结构拿来分析计算，必须根据分析的目的、规定的计算精度、现有的计算条件，来分析结构各部分在振动中的作用，加以"去粗取精"，综合简化成分析模型；用分析模型来建立运动方程，进行动力分析以解决实际工程问题。

最基本的分析模型有两大类：一类是连续系统模型，另一类是离散系统模型。实际分析模型有时还可能是它们的复合。例如图 1-3(a) 表示一简支在托架上的导弹，在 A 点作用有动载荷 $P(t)$，求 A 点沿 y 向的位移响应。此时可以简化为图 1-3(b) 所示的分析模型，将导弹作为弹性梁来处理。这种系统的质量、刚度、阻尼都是连续分布的，并且集质量、刚度、阻尼于一体，这种模型称为**连续系统模型**。连续系统有无穷多的自由度。

如果把连续梁假想分割成若干段，把每段梁的质量按等效原则集中到分割点，形成一系列质点 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，而连接各质点的梁段只有弹性，没有质量，于是就形成了图 1-3(c) 所示的模型。这种模型是人为地将质量、刚度分割开并离散化，称为**离散系统模型**.

如果应用振动理论可得到此系统计算 A 点动位移的等效质量 m_{eq}、等效刚度系数 k_{eq} 与等

效阻尼系数 c_{eq}，则可进一步将系统简化成图 1-3(d) 所示的单自由度弹簧质量系统。这是最简单的离散系统模型。不过应注意，这些等效参量随计算点位置的变化而变化。由上可知，离散系统的基本要素除激励源外，还有质量件 m、弹性件 k、阻尼件 c。

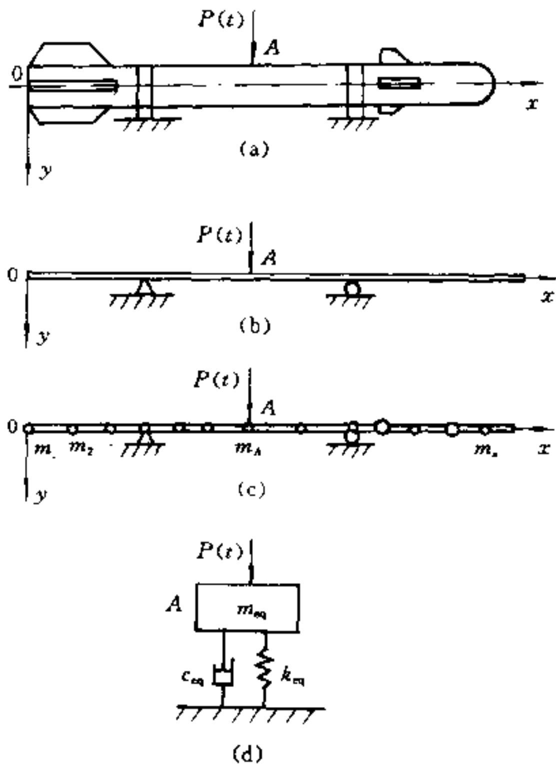


图 1-3

质量件 m 是离散系统中产生惯性力、储藏动能的功能件，通常假定它是刚体。弹性件 k 是系统中产生弹性恢复力、储藏势能的功能件，一般假定它无质量。本书还规定弹性件服从虎克定律，也就是说，它是线性的。阻尼件 c 是系统中产生阻尼力、使能量从动力系统中耗散出去的功能件，一般假定阻尼件既无质量又无弹性，且多采用阻尼力与运动速度成正比的阻尼——"粘性阻尼"。通常质量件 m 与弹性件 k 是系统振动必不可少的要素。上述四种要素的代表性组合之一如图 1-4 所示。此系统虽然只有一个自由度，但通过对它的分析可以揭示振动理论的基本原理和规律，因此本书就是从讨论这种系统入手的。

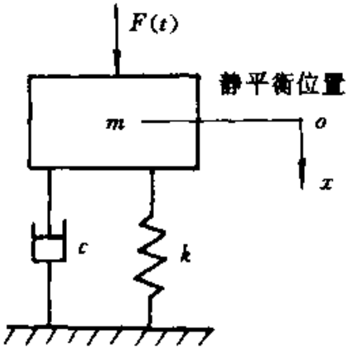


图 1-4

当弹性件、阻尼件均为线性时，动力系统的运动方程可用线性微分方程来表达，称为线性系统；否则为非线性系统。从上面的介绍可见，同一结构可以简化成不同的模型。如何正确拟定分析模型，这将在以后有关章节进一步介绍。

§ 1.4 振动的分类

对于振动现象，由于观察与研究的角度不同，有不同的分类方法。

一、按照激励控制的方式分

（1）自由振动。这是系统受初始干扰产生的振动，或者外激励力消失后存在的振动。由于自由振动的频率及振动形态只取决于系统的弹性和惯性性能，而与外激励无关，能够最基本地反映系统的动力特性，是研究其他各种振动的基础。因此，研究飞行器结构的自由振动特性，具有重要的理论和实际意义。

（2）强迫振动。这是系统在外激励作用下产生的振动。强迫振动中的频率及振幅不仅取决于系统本身的弹性、惯性、阻尼特性，而且与外激励有关。当飞行器发动机工作时，由于旋转部分偏心，或者燃烧不稳定，往往会形成周期性的激励力，从而激起飞行器结构、发动机或操纵系统的强迫振动，即为一例。

（3）自激振动。这是由于输入、输出间有反馈现象并且有能量补充而产生的振动。这时激励是受系统本身控制的。飞行器颤振现象就属于自激振动。

（4）参数振动。如果外激励周期性地改变系统的质量或弹性等性质，则这时所引起的振动称为**参数振动**。火箭发动机燃烧不稳定产生的干扰，就可能激起燃烧室或发动机架的参数振动。

二、按照激励性质分

（1）确定性振动。一个确定性系统（指系统特性是确定性的，不论它是常参数系统，还是变参数系统），在受到确定性激励时，响应也是确定性的。这类振动称为**确定性振动**，亦称为**定则振动**。

（2）随机振动。一个系统，即使是确定性系统，在受到随机激励时，系统的响应亦将是随机的。这类振动称为**随机振动**。

三、按照系统的自由度分

动力系统的自由度，是指在振动过程的任何瞬时，为完全确定系统所处的运动状态而必需的最少独立坐标数目。

单自由度系统的振动——用一个独立坐标就能确定系统运动状态的振动

多自由度系统的振动——用多个独立坐标才能确定系统运动状态的振动。

连续体振动——需用无穷多个独立坐标才能确定系统运动状态的振动。

§ 1.5 简谐振动

简谐振动虽然是最简单的周期性振动，但它可以反映振动的基本特性，并且复杂的周期振动往往可以用有限个简谐振动的叠加来研究。所以，研究简谐振动是很有意义的

一、表示方法

如果周期振动量是时间的正弦或余弦函数(图 1-5)，则该振动叫简谐振动或谐和振动。它是最简单的周期振动，其运动方程为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1-1}$$

式中 A —— 振幅，表示振动中的最大位移量；

ω —— 圆频率，单位：弧度 / 秒(rad/s)；

$(\omega t + \varphi)$ —— 相位角；

φ —— 初相位。

显然，当 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 时，有

$$x(t) = x(t + nT) \quad (n = 1,2,3,\cdots) \tag{1-2}$$

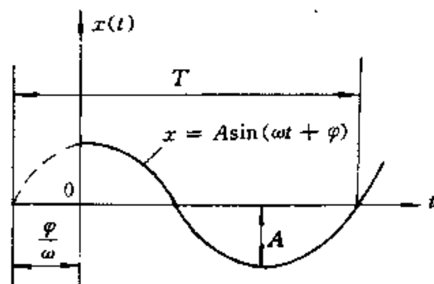


图 1-5

T 称为振动的周期，表示振动重复一次所需要的时间间隔，单位通常为秒(s)。在 1 s 时间内振动重复的次数，称为振动的频率，用 f 表示，有

$$f = \frac{1}{T} \tag{1-3}$$

频率的单位：次 / 秒，称为赫兹，简称赫(Hz)。

简谐振动除了用方程(1-1)代表的三角函数表示外，还可以用旋转矢量的投影表示或用复数表示。

图 1-6 表示一个模为 A 的旋转矢量 $\overrightarrow{OA}$ 以常角速度 ω 绕 O 旋转时在 x、y 轴上投影的变化规律。

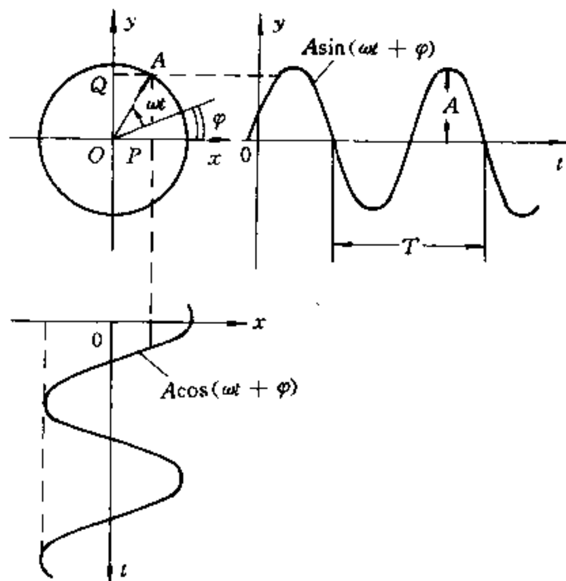


图 1-6

$$OQ = A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$OP = A\cos(\omega t + \varphi)$$

显然，它们分别表示了一种简谐振动。这说明，任何简谐振动都可以用某一旋转矢量的投影来表示，该矢量的模表示简谐振动的振幅，它的旋转角速度表示振动的圆频率 ω。

同样，简谐振动也可用复数 Z 所代表的复旋转矢量来表示，即用一个复旋转矢量在复平面的实轴与虚轴上的投影来表示，如图 1-7 所示。若此复旋转矢量用指数函数表示，即 $Z = Ae^{i\theta}$，则其模 A 表示振幅，幅角 $\theta = \omega t - \varphi$，$\omega$ 为复旋转矢量 Z 的角速度，它代表圆频率。以下用黑体字母表示矢量，则有

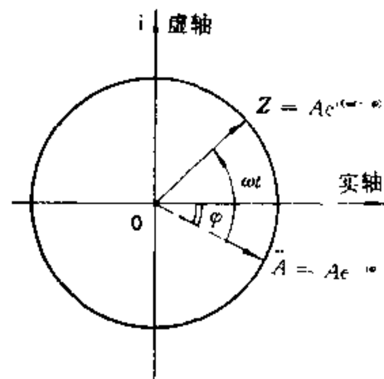


图 1-7

$$\boldsymbol{Z} = Ae^{i(\omega t - \varphi)} \tag{1-4}$$

因为 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

则 $$\boldsymbol{Z} = A\cos(\omega t - \varphi) + iA\sin(\omega t - \varphi) \tag{1-5}$$

式中 $i = \sqrt{-1}$。

复旋转矢量在复平面虚轴和实轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}) &= A\sin(\omega t - \varphi)\\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}) &= A\cos(\omega t - \varphi)\end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

显然，它们分别表示一种简谐振动。

将(1-4)式改写为

$$\boldsymbol{Z} = Ae^{-i\varphi}e^{i\omega t} = \bar{A}e^{i\omega t} \tag{1-7}$$

式中 $$\bar{A} = Ae^{-i\varphi} \tag{1-8}$$

也是复量，叫做**复振幅**，它与时间无关。

二、性质

(1) 简谐振动的速度、加速度仍为同频率的简谐振动。

考虑到 $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, e^{\pi i} = -1,$$

若有一简谐振动

$$\boldsymbol{x} = Ae^{i\omega t} \tag{1-9}$$

则速度

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}(Ae^{i\omega t}) = i\omega Ae^{i\omega t} = A\omega e^{i(\omega t + \pi/2)} \tag{1-10}$$

加速度 $$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{d}{dt}(i\omega Ae^{i\omega t}) = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = A\omega^2 e^{i(\omega t + \pi)} \tag{1-11}$$

显然，$\boldsymbol{x}$、$\dot{\boldsymbol{x}}$、$\ddot{\boldsymbol{x}}$ 均为同频率的简谐振动，每微分一次，振幅乘一次因子 ω，相位角增加 $\frac{\pi}{2}$（图 1-8）。

(2) 将(1-9)、(1-11)式对比，则有：

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega^2 \boldsymbol{x} \tag{1-12}$$

这表明，简谐振动加速度的大小与位移成正比而方向相反，并且始终指向振动的静平衡位置。

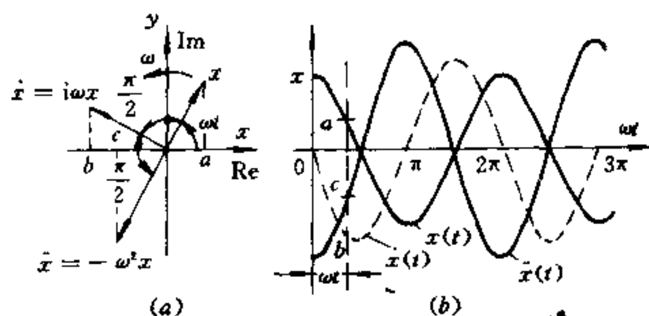


图 1-8

(3) 两个同频率、初相角不同的简谐振动相加，仍然为同频率的简谐振动。

设有两个简谐振动

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

则合矢量为

$$\begin{aligned}x = x_1 + x_2 = X_1 e^{i\omega t} + X_2 e^{i(\omega t+\varphi)} = \\ (X_1 + X_2 e^{i\varphi})e^{i\omega t} = [(X_1 + X_2\cos\varphi) + iX_2\sin\varphi]e^{i\omega t} = \\ Xe^{i\beta}e^{i\omega t} = Xe^{i(\omega t+\beta)}\end{aligned} \quad (1-13)$$

式中

$$X = \sqrt{(X_1 + X_2\cos\varphi)^2 + (X_2\sin\varphi)^2}$$
$$\beta = \arctan\frac{X_2\sin\varphi}{X_1 + X_2\cos\varphi} \quad (1-14)$$

其复旋转矢量图如图 1-9 所示。由(1-13)式可见，合运动仍为同频率的简谐振动。

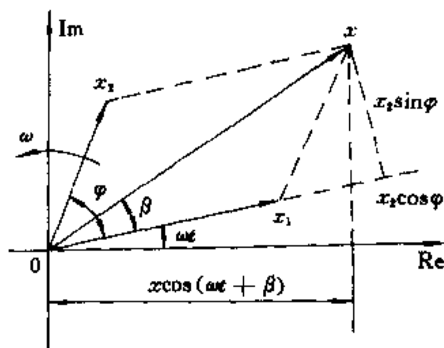


图 1-9

(4) 两个不同频率的简谐振动相加后，不再是简谐振动，一般情况下变为非周期振动。当两频率之比是正整数时，合成后为周期振动。当两频率相差很少时，就产生“拍”的现象。现用复矢量的实部来研究“拍”的现象。

设

$$x_1 = x\cos\omega t$$
$$x_2 = x\cos(\omega + \varepsilon)t$$

ε是微量，则合成后

$$x = x_1 + x_2 = x[\cos\omega t + \cos(\omega + \varepsilon)t] =$$
$$2x\cos\frac{\varepsilon}{2}t\cos\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = x^*\cos\left(\omega + \frac{\varepsilon}{2}\right)t$$

式中
$$x^* = 2x\cos\frac{\varepsilon}{2}t$$

这表明，此时振幅也随时间呈余弦规律变化。其运动形式如图 1-10 所示。这就是“拍”的现象。在测量振动频率时，若出现“拍”的现象，则表明被测物频率与标准比较频率相接近。

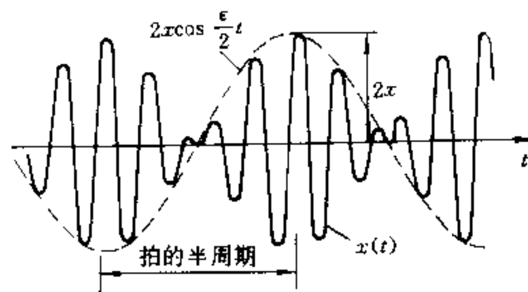


图 1-10

第一篇　振动理论基础

从第一章的论述中可见，飞行器结构动力学涉及的内容很广泛。但人们对事物的认识总是从简单到复杂、从特殊到一般，故本篇主要介绍振动的一般理论，为以后各章的讨论提供理论基础。实际上飞行器结构动态分析的发展过程，就是振动基本理论在工程实际中综合应用与深化的过程。

在理论介绍中，一方面要注意充分应用数学工具与基础理论，但又不花过多篇幅做繁琐的推导。另一方面要重视实用性，不过分追求理论系统的完整性，所用例子力求与飞行器结构的实际相结合。

在内容方面只限于介绍线性振动理论的基本部分，将重点放在单自由度系统振动和多自由度系统的振动之上。对以后各章中需要的连续系统基本理论也做了简明的阐述。

第二章　单自由度系统的振动

§2.1　前　　言

单自由度系统虽然是最简单的动力系统,但对单自由度系统的分析能揭示振动系统的很多基本特性。从后面两章的介绍中可以看出,多自由度系统和连续系统的振动,就其各阶振动形态而言,都常常可以看成是许多单自由度系统特性的线性叠加。从这种意义上说,研究单自由度系统的振动特性是飞行器结构动力学的基础。本章将结合具体振动问题介绍以下振动的基本分析方法:能量法,牛顿运动定律法,褶积积分法,拉普拉斯(Laplace)变换法。前两种方法均以时间为自变量,可谓时间域方法。拉普拉斯变换法则以圆频率 ω 为基本自变量,可称作频域法。

§2.2　无阻尼自由振动

这种动力系统的典型分析模型如图 2-1 所示。由于系统不存在阻尼,没有能量损耗,只受到重力场和弹性力场作用,故属于保守系统,服从机械能守恒定律。一旦振动起来,将永远振动下去。现取质量件 m 的静平衡位置为坐标原点,建立 x 坐标系(向下为正),δ_{st} 表示静位移,弹簧刚度为 k。

一、运动方程的建立

根据机械能守恒定律,系统动能 T 与势能 U 虽然在运动过程中可以转化,但总和不变。即

$$T + U = 常量 \tag{2-1}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + U) = 0 \tag{2-2}$$

结合具体动力系统,将 T,U 的表达式代入上面任何一式,必能导出运动方程,这就是能量法的基本原理。显然,此法只适合于保守系统。现考虑图 2-1 模型,取 m 的静平衡位置为势能零点位置,由理论力学知:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{2-3}$$

$$U = \int_0^x k(\delta_{st} + x)\mathrm{d}x - mgx = k\delta_{st}x + \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

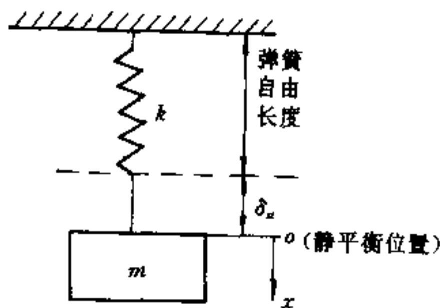


图　2-1

在静平衡状态下

$$k\delta_{st} = mg$$

则上式可写成

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2-4}$$

由(2-4)式可见，若选择静平衡位置为坐标原点来建立运动微分方程，则在势能表达式中不出现重力项。将(2-3)，(2-4)式代入(2-2)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

考虑到 $\dot{x} \neq 0$，故上式可写成

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2-5}$$

或

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

因为 $\frac{k}{m} > 0$，故可令

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \tag{2-6}$$

则(2-5)式变成

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2-7}$$

(2-5)或(2-7)式就是无阻尼单自由度系统的自由振动方程。

二、解方程

显然，此运动方程是二阶常系数线性齐次方程。若初始条件为 $t = 0$ 时 $x = x_0$，$\dot{x} = \dot{x}_0$，则(2-7)式的通解为

$$x = x_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{2-8}$$

因为同频率简谐振动之和仍为同频率的简谐振动，故(2-8)式可写成

$$x = X\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{2-9}$$

式中

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arc\ tan}^{-1}\left(\frac{\omega_n x_0}{\dot{x}_0}\right)$$

三、讨论

(1) 由(2-9)式可看出，无阻尼单自由度系统的自由振动为简谐振动。对于本系统，其振动圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

频率

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2-10}$$

因为 k，m 是系统固有的，所 ω_n，f_n 也是系统固有的，故依次称为**系统的固有圆频率与固有频**

率。习惯上常常称 ω_n 为系统固有频率，但二者不要混淆。

(2) 由(2-10)式可见，刚度相同的两个单自由度系统，其固有频率随质量的增大而减小；质量相同的两个系统，其固有频率随系统刚度的增大而增大。

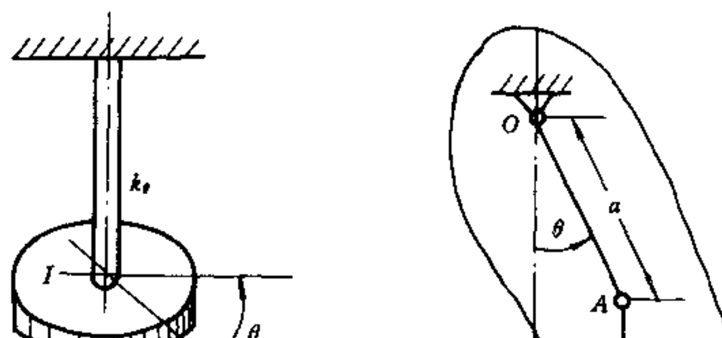
(3) 系统的初始条件对系统固有频率没有影响，而振幅 X 与初相位 φ 均由初始条件决定。

对于需要用角位移作独立坐标来描述振动状态的角振动问题，可用同样方法研究，并可得

$$\left.\begin{aligned}\omega_n &= \sqrt{\frac{k_\theta}{I}} \\ f_n &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_\theta}{I}}\end{aligned}\right\} \tag{2-11}$$

式中　k_θ —— 轴的扭转刚度；

　　　I —— 盘的转动惯量。



$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

现在需求 v_c 与 φ 之间的关系。重心线位移 S_c 为

$$S_c = GG' = OG - OG' = l(1 - \cos\alpha)$$

而由 $\triangle CEA'$ 与 $\triangle OCE$ 有

$$CE = CA'\sin\alpha = l\sin\alpha = 2a\sin\frac{\varphi}{2}$$

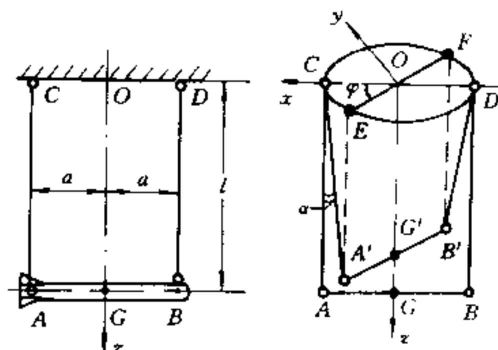


图 2-4

则可导出

$$S_c = l\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{l}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}\right]$$

因为 φ 角很小，可取 $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$，并将上式根号展开而取前两项得

$$S_c \approx l\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\varphi^2}{l^2}\right)\right] = \frac{a^2}{2l}\varphi^2$$

$$v_c = \frac{\mathrm{d}S_c}{\mathrm{d}t} = \frac{a^2}{l}\varphi\dot{\varphi}$$

至此已得到 v_c 与 φ 的关系式，代入动能表达式，考虑到 φ 很小，则

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{Ma^4}{l^2}\varphi^2 + J\right)\dot{\varphi}^2 \approx \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

再计算势能 U：

$$U = MgS_c \approx \frac{1}{2}\frac{Mga^2}{l}\varphi^2$$

式中 g—— 重力加速度。

将上两式代入(2-2)式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mga^2}{l}\varphi^2\right) = 0$$

$$\left(J\ddot{\varphi} + \frac{Mga^2}{l}\varphi\right)\dot{\varphi} = 0$$

因为 $\dot{\varphi} \neq 0$，故得振动方程为

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mga^2}{Jl}\varphi = 0$$

将上式与(2-7)式对比，可知固有圆频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{Mga^2}{Jl}}$$

由此得到固有周期

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{Jl}{Mg}}$$

实际上通过此装置可以测得 T_n，而 M, g, l, a 均为已知，故可通过此实验来导出导弹的惯性矩 J

$$J = \frac{Mg}{l}\left(\frac{T_n a}{2\pi}\right)^2$$

这种方法叫测物体惯性矩的双线摆法。

例 2-2 试用能量法求图 2-5 所示的保守系统的固有频率。

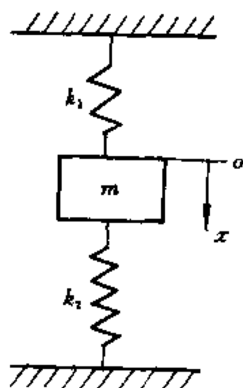


图 2-5

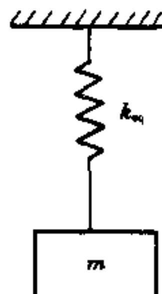


图 2-6

解 对于保守系统，因为在任何瞬间动能与势能之和为常量，所以对振动中任意两状态都有如下关系

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2$$

若选取质量件通过静平衡位置瞬间为状态"1"，仍取静平衡位置为势能零点，则对简谐振动来讲，此时速度最大，动能达到最大值 T_{max}。即

$$T_1 + U_1 = T_1 + 0 = T_{max}$$

若选取质量件具有最大位移时为状态"2"，此时速度为零，故有

$$T_2 + U_2 = 0 + U_2 = U_{max}$$

将上两式代入第一式，则有

$$T_{max} = U_{max} \tag{2-13}$$

今取 x 为从静平衡位置起算的动位移，则

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2x^2$$

由于系统做简谐振动，可设 $x = X\cos\omega_n t$，则

$$T_{max} = \frac{1}{2}m\omega_n^2X^2$$

$$U_{max} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)X^2$$

于是(2-13)式可写成

$$\frac{1}{2}m\omega_n^2X^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)X^2$$

由此可导出固有频率

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \tag{2-14}$$

方程(2－13)是能量法的另一种表达式，应用此式可求得保守系统的固有频率，这种方法也称瑞雷(Rayleigh)法。

将表达式(2－14)与(2－10)加以比较就可以看出，如果把图2－5所示的系统换成图2－6所示的系统，令新系统的刚度系数 $k_{eq}=k_1+k_2$，则两个系统是等效的。我们称此 k_{eq} 为图2－5系统的等效刚度或当量刚度。同理可导出其他系统的等效刚度。采用这种等效原理，还可以导出当量质量、当量阻尼的概念。运用这种技术，可以将复杂系统的结构动力学问题简化为简单的当量系统来分析。

§2.3 有阻尼自由振动

由于阻尼自由振动系统能量不断消耗而转变成热能或声能(噪音)，使振幅不断减弱而最后停止，故阻尼自由振动也称为**衰减振动**。这种系统的典型分析模型如图2－7所示。它是非保守系统，前述的能量法已不适用。本节介绍牛顿运动定律法，它无论对保守或非保守系统都是适用的。如前所述，我们只讨论粘性阻尼情形，即阻尼力 $F_d=c\dot{x}$（c 为阻尼系数，c 的单位为N·s/m）。

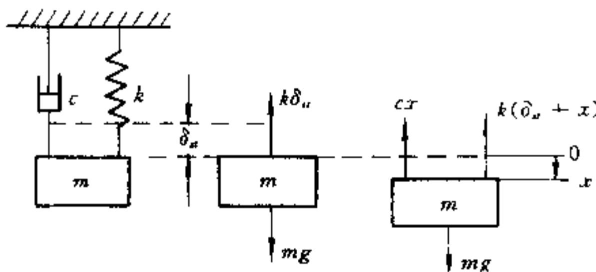


图 2－7

一、运动方程

以静平衡位置为坐标原点，x 坐标向下为正，取质量件 m 为分离体，其受力图如图2－7所示。由牛顿运动定律得

$$m\ddot{x}=mg-k(x+\delta_{st})-c\dot{x}$$

因为 $k\delta_{st}=mg$，上式可简化为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

或

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0 \tag{2-15}$$

可见，若选择静平衡位置为坐标原点，在运动方程中对重力项和静位移就不需要再予以考虑。

设 $\frac{k}{m}=\omega_n^2$，$\frac{c}{m}=2\xi\omega_n$

即

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \xi=\frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{mk}} \tag{2-16}$$

因 c,m,k 是正的，故 ξ 也是正的，称为**阻尼因子或阻尼比**。(2－15)式可改写为

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0 \tag{2-17}$$

(2－15)、(2－17)式均为单自由度阻尼自由振动微分方程(运动方程)。

二、解方程

由高等数学可知，(2－17)式的解可取 $x=Be^{St}$ 的形式，B、S 为待定常数。将此解代入(2－17)式得微分方程的特征方程式

$$S^2+2\xi\omega_nS+\omega_n^2=0 \tag{2-18}$$

此特征方程的根是

$$S_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2-1}\omega_n \tag{2-19}$$

故(2·17)式的解可写成

$$x = B_1 e^{S_1 t} + B_2 e^{S_2 t} \tag{2-20}$$

B_1、B_2 为初始条件所决定的待定常量。

三、讨论

(1) 当 $\xi<1$ 时,(2-19)式两根为共轭复根

$$S_{1,2}=-\xi\omega_n \pm i\omega_d \tag{2-21}$$

式中

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{2-22}$$

$$i=\sqrt{-1}$$

由(2-20)、(2-21)式考虑到欧拉公式

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta \pm i\sin\theta \tag{2-23}$$

则通解可写成

$$x=e^{-\xi\omega_n t}[(B_1+B_2)\cos\omega_d t + i(B_1-B_2)\sin\omega_d t]$$

因位移 x 是实数物理量,故上式的(B_1+B_2)和$i(B_1-B_2)$也是实数,依次用A_1、A_2表示。这就要求 B_1、B_2 为共轭复数。于是上式可写成

$$x=e^{-\xi\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t) \tag{2-24}$$

或

$$x=Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi) \tag{2-25}$$

式中

$$A_1=x_0,\quad A_2=\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\right)^2},\quad \varphi=\arctan\left(\frac{x_0\omega_d}{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}\right)$$

显然,$\xi<1$ 时为衰减的简谐振动,而且当 $\omega_d<\omega_n$ 即有阻尼时,固有频率略有下降。图 2-8 表示的即为衰减振动。

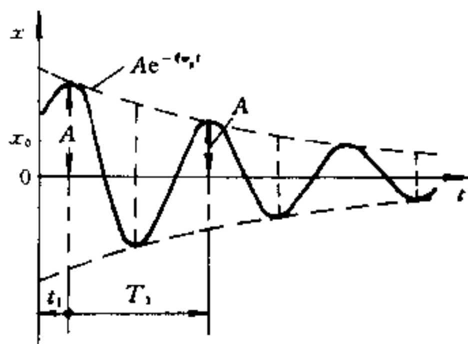


图 2-8

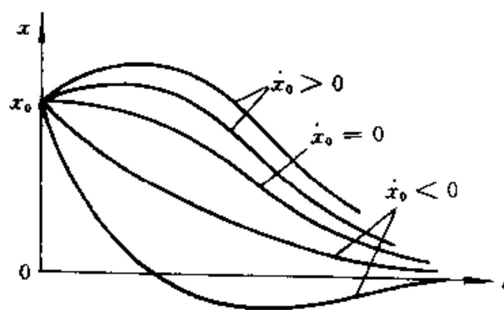


图 2-9

(2) 当 $\xi=1$ 时,(2-19)式有重根"$-\omega_n$",通解

$$x=(B_3+B_4 t)e^{-\omega_n t} \tag{2-26}$$

为非周期单调衰减运动(图 2-9),它是振动与否的临界状态,称为**临界阻尼情况**。此时的阻尼

系数称为**临界阻尼系数** c_c，故 $c_c = 2m\omega_n$。将一般情况的 $c = 2\xi\omega_n m$ 引入，得

$$\xi = \frac{c}{c_c} \tag{2-27}$$

也可以用表达式(2-27)来定义 ξ，这就是称 ξ 为"阻尼比"的来源。(2-26)式中 B_3、B_4 为边界条件所确定的常数。应当注意：c、ξ 均为系统实际阻尼的反映，而 c_c 并非实际系统存在的阻尼参量($\xi = 1$ 除外)，它为指标性参量，是决定振动能否发生的临界阻尼值。

(3) 当 $\xi > 1$ 时，特征根为不相等的二个负实根。通解由(2-19)、(2-20)式得

$$x = B_1 e^{(-\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} + B_2 e^{(-\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t} \tag{2-28}$$

因 $\sqrt{\xi^2-1} < \xi$，故运动随时间单调衰减而无振动。此情况称为**过阻尼情况**，如图 2-10 所示。

例 2-3 设初始条件为 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$。试确定图 2-7 所示系统振动中相差一个周期的两相邻振幅之比，并予以讨论($\xi < 1$)。

解 我们讨论的是 $\xi < 1$ 时的情况，由(2-25)式得

$$x = Ae^{-\xi\omega_d t/\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{d(\omega_d t)} = Ae^{-\xi\omega_d t/\sqrt{1-\xi^2}}\left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t + \varphi) + \cos(\omega_d t + \varphi)\right] = 0$$

所以，最大振幅发生在 $\tan(\omega_d t + \varphi) = \sqrt{1-\xi^2}/\xi$。

由于正切函数周期为 π，故每隔 π/ω_d 出现极值一次，如图 2-11 所示。相邻两个同向振幅间的间距为

$$(\omega_d t_2 + \varphi) - (\omega_d t_1 + \varphi) = 2\pi$$

则

$$t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\sin(\omega_d t_1 + \varphi) = \sin(\omega_d t_2 + \varphi)$$

两相邻振幅比为

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\xi\omega_n t_1}\sin(\omega_d t_1 + \varphi)}{Ae^{-\xi\omega_n t_2}\sin(\omega_d t_2 + \varphi)} = e^{\xi\omega_n(t_2-t_1)} = e^{\xi\omega_n(2\pi/\omega_d)} = e^{2\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

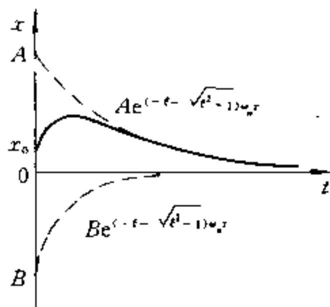


图 2-10

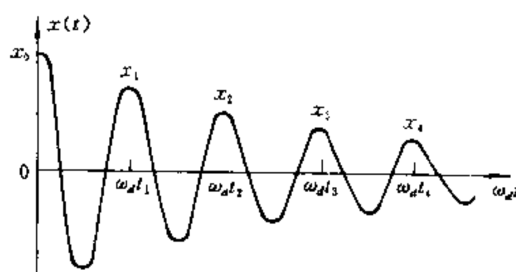


图 2-11

讨论

从振幅比表达式可以看出，振幅比仅仅取决于阻尼比 ξ。取该振幅比的自然对数，得

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

δ 称为对数衰减率，常用来表示振动的阻尼特性。当 $\xi \ll 1$ 时

$$\delta \approx 2\pi\xi \tag{2-29}$$

若由实验测得振幅衰减曲线，由相邻振幅比计算出 δ，则可利用(2-29)式计算出该单自由度系统的粘性阻尼比 ξ。

§2.4 周期激励的强迫振动

系统由外界持续激励引起的振动称强迫振动。外激励的来源有两类情况：一类是持续作用在质量件上的激励力，另一类是持续的支承运动。我们直接研究有阻尼系统，因为无阻尼系统只是它的特例($\xi = 0$ 时)。

一、周期力的响应

其典型分析模型如图 2-12 所示。在质量件 m 上作用有周期力 $F(t)$。

设此周期激励的周期为 $\bar{T}$，圆频率为 $\bar{\omega}$。一个周期函数可以展开为傅里叶级数，此时，对一个周期激励，可分解成一系列不同频率的简谐函数来处理，即

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\bar{\omega}t + a_2\cos 2\bar{\omega}t + \cdots + \\ &\quad b_1\sin\bar{\omega}t + b_2\sin 2\bar{\omega}t + \cdots = \\ &\quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t) \end{aligned} \tag{2-30}$$

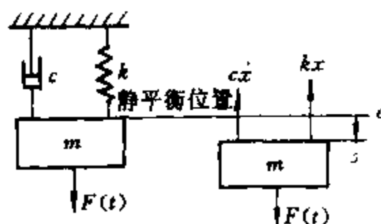


图 2-12

式中

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\mathrm{d}t \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\bar{\omega}t\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\bar{\omega}t\mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{2-31}$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

建立这个系统的运动方程仍用牛顿运动定律法。质量件在任一瞬时的受力情况如图 2-12 所示。它与有阻尼自由振动情况相比只多了一个激励力 $F(t)$，因此运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t) \tag{2-32}$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

因为系统是线性的，可以应用叠加原理，即线性系统中所有外力同时作用的结果等于每个力单独作用结果的叠加；所以，只需求出(2-32)式各外激励项的响应，加以叠加，就可得到所求的解。分析(2-32)式各外力项，第一项是静力项，故只需研究简谐力项的响应。

1. 简谐激励的响应

设 $F(t)=F_0\sin\bar{\omega}t$，则运动方程可写成

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0\sin\bar{\omega}t \tag{2-33}$$

或

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{F_0}{m}\sin\bar{\omega}t$$

如用矢量表示法，则运动方程也可以写成

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\overline{F}e^{i\bar{\omega}t} \tag{2-34}$$

式中　$\overline{F}$—— 复振幅。

当选择力矢量为基准时

$$\overline{F}=|\overline{F}|=F_0$$

(2-33) 式的解由微分方程理论知

$$x=x_c+x_p \tag{2-35}$$

式中　x_c—— 齐次解；

x_p—— 非齐次特解。

(1) 齐次解 x_c。此时运动方程为

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0$$

可见，它对应于有阻尼自由振动，其解由(2-25)、(2-26)、(2-28) 式决定，这是一种衰减振动，一段时间后振动就停止了，故齐次解也称为系统的**瞬态解**。瞬态解的振动频率为系统的固有频率。

(2) 非齐次特解 x_p。设特解为

$$x_p=X\sin(\bar{\omega}t-\phi)$$

用复数表示：

$$x_p=\overline{X}e^{i\bar{\omega}t}=(Xe^{-i\varphi})e^{i\bar{\omega}t} \tag{2-36}$$

式中　$\overline{X}$—— 复振幅。

将(2-36) 式代入(2-34) 式得

$$(-m\bar{\omega}^2+ic\bar{\omega}+k)\overline{X}e^{i\bar{\omega}t}=\overline{F}e^{i\bar{\omega}t}$$

则

$$\overline{X}=\frac{\overline{F}}{k-\bar{\omega}^2m+i\bar{\omega}c}=Xe^{-i\varphi} \tag{2-37A}$$

式中

$$X=|\overline{X}|=\frac{|\overline{F}|}{|k-\bar{\omega}^2m+i\bar{\omega}c|}=\frac{F_0}{\sqrt{(k-\bar{\omega}^2m)^2+(\bar{\omega}c)^2}} \tag{2-37B}$$

相对激励力的相位差

$$\phi=\arctan\frac{c\bar{\omega}}{k-\bar{\omega}^2m} \tag{2-38}$$

定出了合理的 X、ϕ 说明假设是正确的。

令 $\frac{\bar{\omega}}{\omega_n}=\beta$（称 β 为**频率比**），$D=\frac{X}{F_0/k}$（表示稳态响应振幅与静变位之比，叫做**动力放大系数**），则

$$X=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \tag{2-39}$$

而且

$$\phi=\arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \tag{2-40}$$

动力放大系数

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{2-41}$$

将(2-37B)、(2-38)式代入(2-36)式得特解

$$x_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{i(\bar{\omega}t-\phi)} \tag{2-42}$$

或

$$x_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \sin(\bar{\omega}t - \phi)$$

这说明，此特解是与激励力同频率的简谐振动。它是与初始条件无关的非衰减振动，称为**稳态振动**。

将(2-25)、(2-42)式代入(2-35)式，可得弱阻尼情况的通解

$$x = Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t + \varphi) + X(\sin(\bar{\omega}t - \phi) \tag{2-43}$$

式中 A,φ 取决于初始条件。第一项为瞬态响应解——自由振动部分，第二项为稳态响应解——强迫振动部分。系统开始是上述两种运动的合运动；经过一段时间后，瞬态部分较快地衰减掉了，系统即以激励力频率 $\bar{\omega}$ 作强迫振动(如图 2-13)。X,ϕ 由系统动力特性与激励力决定。

讨论

(1) 稳态振动是与激励力同频率的简谐振动。其振幅由外激励力幅值、频率及系统本身振动固有特性决定，而与初始条件无关，不因阻尼的存在而衰减。

(2) 由(2-41)式可见，动力放大系数 D 取决于 ξ,β 的大小(图 2-14)。当 $\beta\approx 1$，即当激励力的频率约等于系统固有频率时，将发生共振。无阻尼时($\beta=1$)振幅无限增大，有阻尼时振幅被限制在一较大数值处。由(2-41)式可知，此时的动力放大系数为

$$D = \frac{1}{2\xi} = Q \tag{2-44}$$

它反映了系统阻尼的强弱和共振峰陡峭程度，叫做品质因子 Q。图 2-14 叫**幅频响应曲线**。

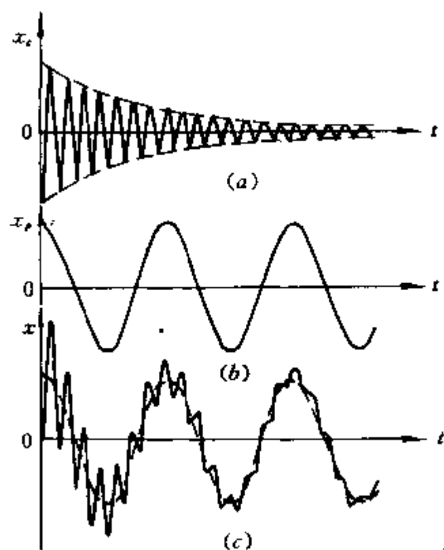


图 2-13

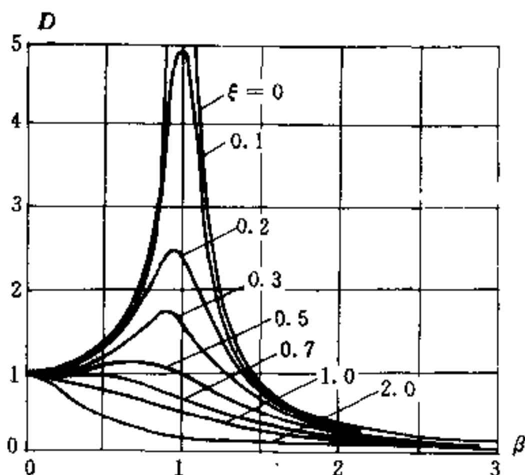


图 2-14

(3) 由(2-41)式可知，当有阻尼时，$\beta=1$ 的 D 并不是极大。通过求 D 的极值可知，当 $\beta=\sqrt{1-2\xi^2}$ 时 D 为极大，而且

$$D_{\max}=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

若只研究位移响应，此时的激励力频率就是强迫共振频率 $\bar{\omega}_R$。它比 ω_n 略小，而且小于 ω_n

$$\bar{\omega}_R=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \tag{2-45}$$

由于阻尼一般都较小($\xi=0.05\sim0.20$)，$\omega_n\approx\omega_R$，故通常可把 $\bar{\omega}=\omega_n$ 作为共振频率

(4) 图2-15叫做**相位频率共振曲线**。可以看出：滞后相位 ϕ 在 $0°$ 到 $180°$ 之间，且随 β、ξ 而变。无阻尼时 ϕ 为 $0°(\beta>1)$ 或 $180°(\beta<1)$。有阻尼时，若 $\beta=1$，则 $\phi=90°$，此时 ϕ 角与阻尼大小无关，这是共振时的一个重要特征。

实际工程问题比较复杂。处理工程问题的方法之一就是，把复杂系统简化成简单的当量系统，应用已有的理论来求解。当量单自由度系统的运动方程为

$$m_{eq}\ddot{x}+c_{eq}\dot{x}+k_{eq}x=F_{eq}(t)$$

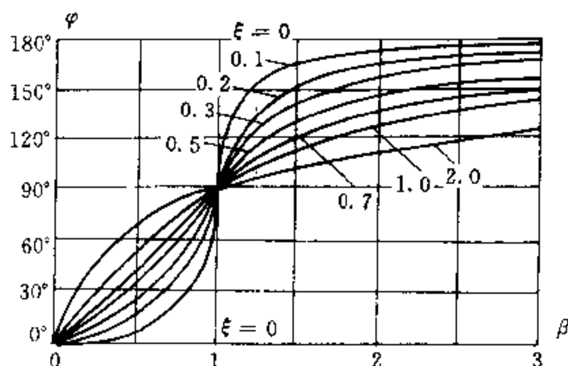


图 2-15

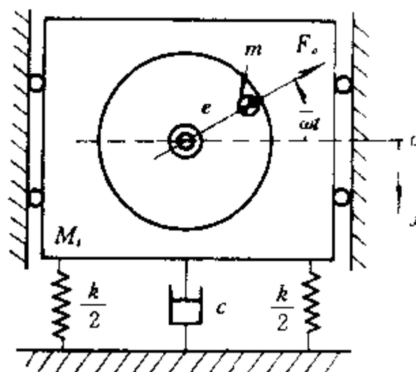


图 2-16

式中 m_{eq}、c_{eq}、k_{eq} 和 $F_{eq}(t)$ 依次称为**等效质量**、**等效阻尼系数**、**等效刚度系数**和**等效激振力**。一旦上面方程建立，就可用等效量代替公式中对应的物理量，应用已有的理论进行分析。现以偏心质量引起的强迫振动为例来说明这一方法。飞行器结构的旋转部件(如涡轮喷气发动机等)中由于质量偏心而引起的强迫振动就属于此类问题。其典型分析模型及其基本要素符号如图2-16所示。M_t 表示系统的质量，m 表示旋转部分的偏心质量，e 为偏心距。当转速为 N(r/min)时，偏心质量 m 就以 $\bar{\omega}=\dfrac{2\pi N}{60}$(1/s) 作等速圆周运动，产生离心惯性力

$$F_0=me\bar{\omega}^2$$

F_0 的垂直分量就是垂直激振力 F，故

$$F=F_0\sin\bar{\omega}t=me\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t$$

以坐标 x 表示系统离开静平衡位置的位移，则用牛顿运动定律法可得系统的运动方程

$$M_t\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\bar{\omega}^2\sin\bar{\omega}t \tag{2-46}$$

将(2-46)式与(2-33)式对比，可令

$$F_{0_{eq}}=me\bar{\omega}^2$$

其当量系统如图 2－17 所示。它与图 2－12 相同，故可利用(2－39)、(2－40) 式，将式中 F_0 换成 $F_{0_{eq}}$，于是

$$\left.\begin{aligned} &\text{振幅} \qquad X = \frac{me\bar{\omega}^2}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \\ &\text{相位差} \qquad \phi = \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \end{aligned}\right\} \tag{2-47}$$

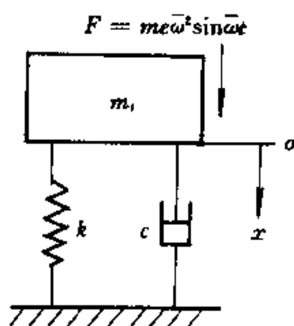


图 2－17

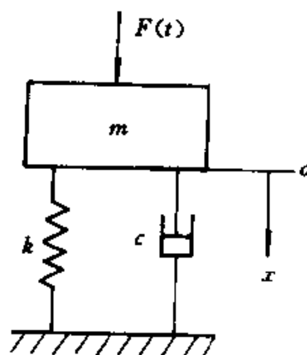


图 2－18

例 2－4 图 2－18 表示计算飞行器内部设备受到激励力作用的响应时所用模型之一。若激励力 $F = 24\sin 15t$ N，初始条件为 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 100$ mm/s，设备质量 $m = 20$ kg，$k = 8\,000$ N/m，$c = 130$ N·s/m。求该设备的响应历程。

解 在简谐激励下的响应可利用(2－43) 式计算。为此应先算出以下参量

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8\,000}{20}} = 20\ (\text{rad/s})$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{130}{2\times 20\times 20} = 0.162\,5$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 19.7\ (\text{rad/s})$$

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n} = \frac{15}{20} = 0.75$$

$$\frac{F_0}{k} = \frac{24}{8\,000} = 0.003\ (\text{m})$$

由(2－25) 式知瞬态响应为

$$x_c = Ae^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi) = Ae^{-3.25t}\sin(19.7t+\varphi)$$

由(2－12) 式知稳态响应为

$$x_p = X\sin(\bar{\omega}t-\phi) = \frac{0.003}{\sqrt{(1-0.75^2)^2+(2\times 0.162\,5\times 0.75)^2}}\sin(15t-\phi) = 0.006\sin(15t-\phi)\quad(\text{m})$$

$$\phi = \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} = \arctan\frac{2\times 0.162\,5\times 0.75}{1-0.75^2} = 29.1^\circ$$

故总响应历程为

$$x = Ae^{-3.25t}\sin(19.7t + \varphi) + 6.0\sin(15t - 29.1^\circ) \quad (\mathrm{mm})$$

应用初始条件定 A, φ。由已知条件得

$$x(0) = A\sin\varphi + 6.0\sin(-29.1^\circ) = 0$$

$$\dot{x}(0) = A(-3.25\sin\varphi + 19.7\cos\varphi) + 6.0 \times 15\cos(-29.1^\circ) = 100$$

联立上面两式解得

$$A = 3.31\ \mathrm{mm}$$

$$\varphi = 61.8^\circ$$

故总的响应历程为

$$x = 3.31e^{-3.25t}\sin(19.7t + 61.8^\circ) + 6.0\sin(15t - 29.1^\circ) \quad (\mathrm{mm})$$

其响应曲线如图 2-19 所示。显然,过一定时间后稳态响应即为总运动。

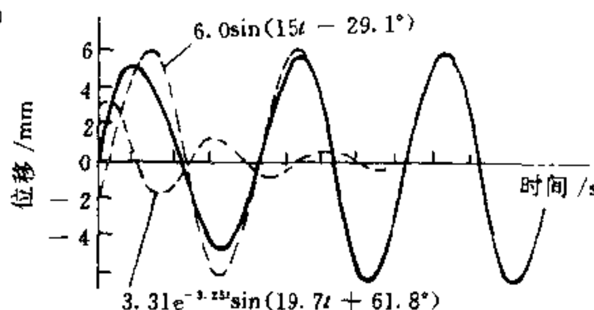


图 2-19

2. *任意周期力的响应*

根据叠加原理和前面对各种简谐分量激励的分析结果,在不考虑瞬态响应的情况下,总响应可表示成

$$x = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\cos(n\bar{\omega}t - \phi_n) + b_n\sin(n\bar{\omega}t - \phi_n)}{k\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}}$$

式中

$$\beta_n = \frac{n\bar{\omega}}{\omega_n} \quad \phi_n = \arctan\frac{2\xi\beta_n}{1-\beta_n^2}$$

二、基础激励响应

弹体振动激起的内部设备振动,导弹运输中路面不平产生的弹体振动,飞机滑跑时跑道不平引起的飞机振动等等,都可以看成是由于系统的基础(支承点)运动而引起的系统振动,其典型分析模型如图 2-20 所示。我们仍然从支承点的简谐运动情况开始,然后解决周期性支承点运动问题。在这类情况下,弹性件与阻尼件两端同时有运动,任一瞬时产生的弹性恢复力为 $k(x - x_s)$,阻尼力为 $c(\dot{x} - \dot{x}_s)$。由牛顿运动定律可导出此系统的运动方程为:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_s) - c(\dot{x} - \dot{x}_s)$$

即

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kx_s + c\dot{x}_s \tag{2-48}$$

显然

$$F_{eq}(t) = kx_s + c\dot{x}_s$$

可见,基础激励仍然可以通过导出等效量的办法来研究。其当量系统如图 2-21 所示。应用已有的结论分析此当量系统,即可解决此类问题。

1. *支承点作简谐振动*

设支承点运动位移 $x_s = ae^{i\bar{\omega}t}$

系统运动位移 $x = \bar{X}e^{i\bar{\omega}t} = Xe^{i(\bar{\omega}t-\phi)}$ (2-49)

$\bar{X}$ 为复振幅。将 x 与 x_s 的表达式代入(2-48)式得

$$(k - m\bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega})\bar{X}e^{i\bar{\omega}t} = (ic\bar{\omega} + k)ae^{i\bar{\omega}t}$$

从而得复振幅

$$\overline{X} = \frac{k + \mathrm{i}c\overline{\omega}}{(k - m\overline{\omega}^2) + \mathrm{i}c\overline{\omega}}a$$

而

$$\overline{X} = X\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \quad (\phi\text{为相位差})$$

则振幅

$$X = a\sqrt{\frac{k^2 + c^2\overline{\omega}^2}{(k - m\overline{\omega}^2)^2 + c^2\overline{\omega}^2}} = a\sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{2-50}$$

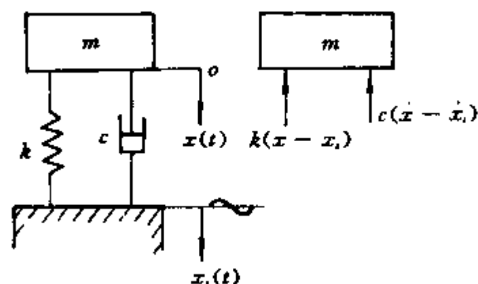


图 2-20

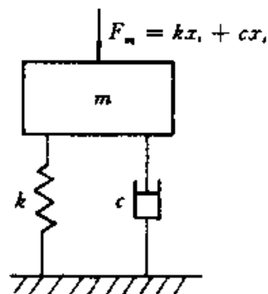


图 2-21

相位差

$$\phi = \arctan\frac{c\overline{\omega}}{k - m\overline{\omega}^2} - \arctan\frac{c\overline{\omega}}{k} = \arctan\frac{mc\overline{\omega}^3}{k(k - m\overline{\omega}^2) + (c\overline{\omega})^2}$$

则

$$\phi = \arctan\frac{2\xi\beta^3}{1 - \beta^2 + (2\xi\beta)^2} \tag{2-51}$$

而放大系数

$$D = \frac{X}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \tag{2-52}$$

其幅频曲线与相位频率曲线见图 2-22。它们有如下性质：

(1) 当 $\beta = \sqrt{2}$ 时，$D = 1$，而且与 ξ 无关。

(2) 当 $\beta = 1$ 时

$$D = \sqrt{1 + \frac{1}{4\xi^2}}, \quad \phi = \arctan\frac{1}{2\xi} \tag{2-53}$$

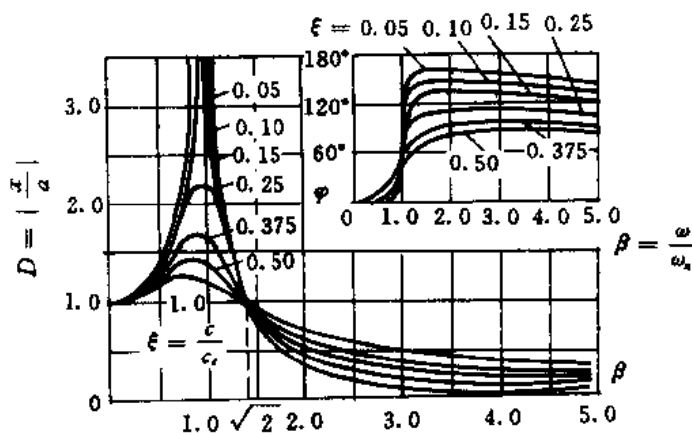


图 2-22

(3) 当 $\beta \to 0$ 时，$\phi \to 0°$；而当 $\beta \to \infty$ 时，$\phi \to 90°$。如果支承点的运动是以速度或加速度来表示，设

$$\dot{x}_s = b\sin\bar{\omega}t$$

或

$$\ddot{x}_s = c\sin\bar{\omega}t$$

则通过同样的分析，可得到响应的振幅

$$X = \frac{b}{\bar{\omega}}\sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

或

$$X = \frac{c}{\bar{\omega}^2}\sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

2. 支承点作周期振动

当支承点作周期性运动时，我们采用与处理周期性激励力相同的方法、步骤，将此周期运动分解成一系列简谐运动的叠加。故设：

$$x_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\bar{\omega}t + b_n\sin n\bar{\omega}t)$$

分别求出其中各项的响应，然后叠加可得总的响应为

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta_n)^2}{(1 - \beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}}\left[a_n\cos(n\bar{\omega}t - \phi_n) + b_n\sin(n\bar{\omega}t - \phi_n)\right] \quad (2-54)$$

式中

$$\phi_n = \arctan\frac{2\xi\beta_n^3}{1 - \beta_n^2 + (2\xi\beta_n)^2}, \quad \beta_n = \frac{n\bar{\omega}}{\omega_n}$$

例 2-5 飞机在跑道上降落滑行，前轮着地，后轮悬空。滑行中，前轮轴有上下运动(图 2-23(a))。

$$y = Y_1\sin\bar{\omega}t$$

已知飞机的质量为 $M = 2\,940$ kg(不计起落架质量)，起落架的弹簧刚度 $k = 291$ kN/m，粘性阻尼系数 $c = 5\,880$ s·N/m。若滑行中 $\bar{\omega} = 30$ rad/s，$Y_1 = 10$ cm，求机身上下运动的幅度。

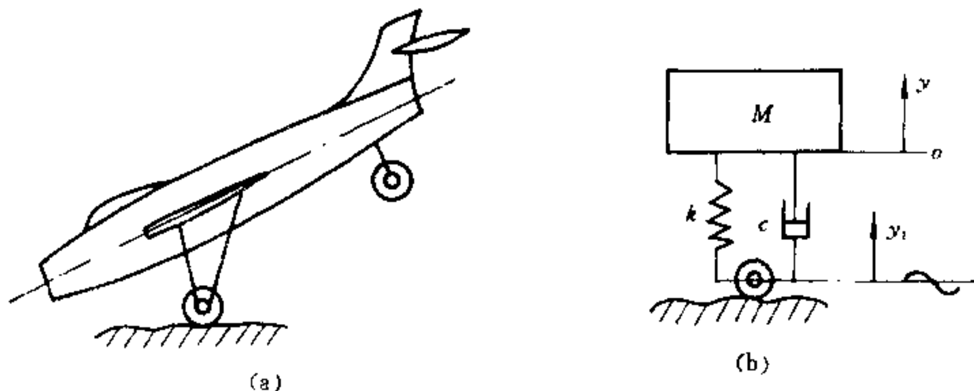


图 2-23

解 系统的分析模型如图 2-23(b) 所示。

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{294 \times 10^3}{2\,940}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{30}{10} = 3$$

$$\xi = \frac{c}{2M\omega_n} = 0.1$$

由(2－50)式可得振幅

$$y = Y_1\sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} = 10\sqrt{\frac{1+4\times0.1^2\times3^2}{(1-3^2)^2+4\times0.1^2\times3^2}} = 1.454\ (\text{cm})$$

则机身上下运动的幅度为

$$2y = 2.91\ \text{cm}$$

三、隔振原理

强烈振源不但会给飞行器结构本身带来不利影响，而且会造成周围仪器不能正常工作。为减小振源的干扰力，通常在振源周围设置适当的弹簧与阻尼元件（合称减震器），这就是隔振问题。如果干扰力作用在隔振对象上，或者是隔振对象自己发出的，则隔振是为了减小干扰力对基础的作用，称为第一类隔振，或称“隔力”（图 2－24）。第二类隔振问题是干扰力作用在基础上，隔振是为了减小基础振动对隔振对象的作用，也可称“隔幅”（图 2－25）。对于第一类隔振问题，设振源产生的干扰力 $F(t)$ 为简谐力，用复数表示

$$F(t) = \overline{F}e^{i\overline{\omega}t}$$

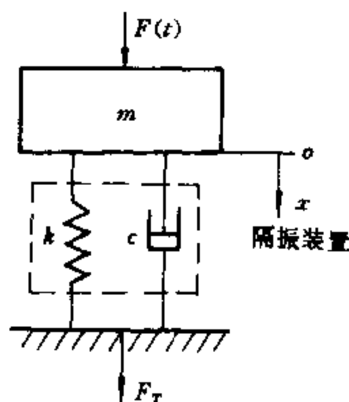


图 2－24

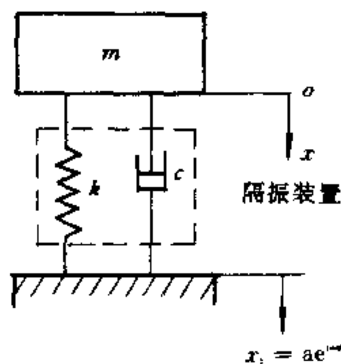


图 2－25

设基础的变形忽略不计，则系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \overline{F}e^{i\overline{\omega}t}$$

式中 $\overline{F}$ 为干扰力的复振幅。此时通过减震器传递到基础上的力 F_T 为

$$F_T = kx + c\dot{x}$$

设其稳态解 $x(t) = \overline{X}e^{i\overline{\omega}t}$，由(2－37A)式可知复振幅

$$\overline{X} = \frac{\overline{F}}{k - m\overline{\omega}^2 + ic\overline{\omega}}$$

故
$$F_T = (k + ic\overline{\omega})\overline{X}e^{i\overline{\omega}t} = \frac{k + ic\overline{\omega}}{k - m\overline{\omega}^2 + ic\overline{\omega}}\overline{F}e^{i\overline{\omega}t}$$

即
$$\frac{\overline{F}_T}{\overline{F}} = \frac{k + ic\overline{\omega}}{k - m\overline{\omega}^2 + ic\overline{\omega}}$$

传递力 F_T 的幅值与干扰力 F 的幅值之比定义为传递率 TR，即

$$TR = \frac{|F_T|}{|F|} = \sqrt{\frac{k^2 + (c\overline{\omega})^2}{(k - m\overline{\omega}^2)^2 + (c\overline{\omega})^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{(1-\beta)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad (2-55)$$

将(2-55)式同(2-52)式相比可以看出，传递率与基础位移激励的放大系数表达式相同；所以，将图2-22的幅频响应曲线纵坐标D改为TR，就成为传递率随频率变化的特性曲线。由此曲线可看出以下特征：

(1) 不论阻尼大小，只有当$\beta > \sqrt{2}$时才有隔振效果。而且，弹簧阻尼减震器在低频区间(相对于系统固有频率而言)对隔振不但无利反而有害。

(2) $\beta > \sqrt{2}$以后，随着频率比增加，TR趋向于零。但在$\beta > 5$以后，TR曲线几乎水平：即使采用更好的弹簧阻尼减震器，隔振效果也提高有限。实用上常取β值在2.5～5之间已足够。

(3) 当$\beta > \sqrt{2}$时，TR随ξ的增大而提高，故此时盲目增大阻尼反而对隔振不利。

对第二类隔振问题来说，其特点是通过减震器来减小基础位移激励x_s传给隔振对象(质量件m)的振动幅值。显然，这与基础位移激励情况完全相同。隔振对象在隔振后的振幅X与基础作支承运动的振幅a之比定义为位移的传递率TD。由(2-52)式知：

$$TD = \frac{X}{a} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \tag{2-56}$$

比较一下(2-55)式与(2-56)式，可知$TR = TD$。因此，防止基础振动的位移传到隔振对象上去的问题和防止作用在隔振对象上的干扰力传到基础上去的问题，二者特性完全相同

为了更直接地说明隔振效果，通常用隔振效率ε来表示，并定义

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= (1-TR)\times 100\% \\ \varepsilon &= (1-TD)\times 100\% \end{aligned}\right\} \tag{2-57}$$

它表示隔振装置所隔离掉的振动的百分率。

例 2-6 飞行器内某精密设备用对称分布的4个弹簧(每边两个并联)作隔振装置(图2-26)。并固定在仪器舱壳体上。已知该设备支承点的位移按$x_s = 12\sin 25\pi t[\mu\text{m}]$作垂直振动。设备质量$m = 8$ kg，每个弹簧的刚度为$k = 19.6$ N/cm。忽略阻尼影响，求隔振效率与设备振幅。

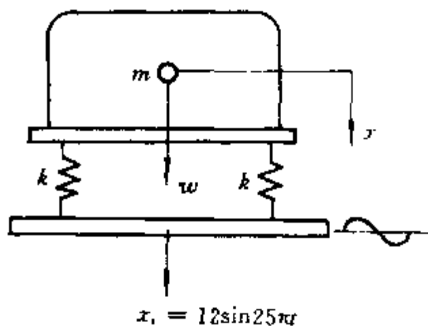


图 2-26

解 系统固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{4\times 19.6\times 10^2}{8}} = 31.3\ (\text{rad/s})$$

设备支承点的振动频率

$$\omega = 25\pi = 78.54\ \text{rad/s}$$

则频率比

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{78.54}{31.3} = 2.51 > \sqrt{2}$$

因忽略阻尼，$\xi = 0$。由(2-56)式得传递率

$$TD = \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{(1-2.51^2)^2}} = 0.187$$

本隔振装置的隔振效率

$$\varepsilon = (1-0.187)\times 100\% = 81.3\%$$

设备的振幅由(2-56)式求得：

$$X = aTD = 12 \times 0.187 = 2.24\ \mu\text{m}$$

§2.5 任意激励的强迫振动

在实际工程中，激励往往是任意的确定的时间函数（包括作用时间极短的冲击作用）。此时，系统的振动可理解为一系列发自不同时刻的瞬态振动的总和。激振停止后，系统按固有频率继续作自由振动。系统在任意激励下的振动状态（包括激励停止后的自由振动）称为任意激励的响应。

求任意激励的响应有数种方法可供选择。其共同的前提条件是，系统必须是线性的微振动，而且激励函数是确定的。本节只介绍褶积积分法和拉普拉斯变换法。

一、褶积积分法

此法的基本思想是，把图 2-27 所示的任意激励看成是无数的脉冲（阴影部分所示）连续作用。根据叠加原理，分别求出系统对每一个脉冲的响应，然后将它们叠加起来，就得到所求的总响应。即用一个脉冲序列来代替任意激励。

1. *单位冲击作用下的响应*

首先研究零初始条件下单位冲击的响应。单位冲击是一种具有特殊函数图象的激励。此图象具有零宽度、单位面积和无穷大的高度。此激励函数也叫 δ 函数。当单位冲击发生在 $t=0$ 时刻时，δ 函数的数学表达式为

$$\left.\begin{aligned} &\delta(t) = 0,（当\ t \neq 0\ 时）\\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2-58}$$

当单位冲击发生在 $t=\tau$ 时，δ 函数的数学表达式为

$$\left.\begin{aligned} &\delta(t-\tau) = 0,（当\ t \neq \tau\ 时）\\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\mathrm{d}t = 1 \end{aligned}\right\} \tag{2-59}$$

图 2-28 表示了这两种单位冲击。

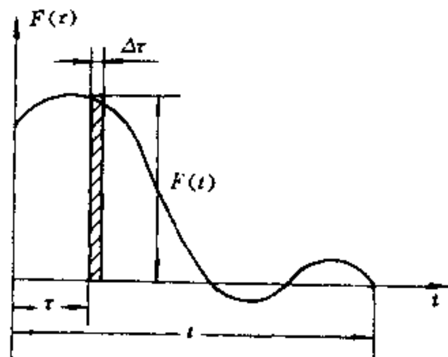


图 2-27

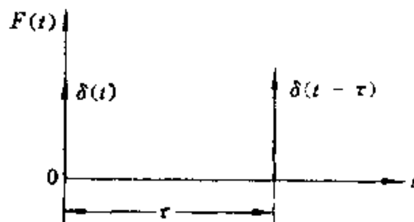


图 2-28

单位冲击下系统的振动微分方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\delta(t) \tag{2-60}$$

冲击前系统是静止的，故

$$x(0^-)=\dot{x}(0^-)=0 \tag{2-61}$$

由于 $\delta(t)$ 作用于 $t=0$ 瞬时，$t\geqslant 0^+$ 时为自由振动，故可将 $t=0$ 时输入 $\delta(t)$ 看成是该自由振动的初始条件。只要定出初始条件，代入自由振动解，即可得到所求的响应。为确定 $t=0^+$ 时的初始条件，可对(2-60)式进行两次积分，于是得

$$m[x(0^+)-x(0^-)]+\int_{0^-}^{0^+}c\dot{x}\mathrm{d}t+\iint_{0^-}^{0^+}k\dot{x}\mathrm{d}t\mathrm{d}t=\iint_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t \tag{2-62A}$$

因为 x 为有界量，而 0^+ 到 0^- 积分区间为无穷小，所以上式 x 的积分项应为零，再考虑(2-58)式，则(2-62A)式应为

$$m[x(0^+)-x(0^-)]+0+0=0 \tag{2-62B}$$

在 $0\leqslant t\leqslant 0^+$ 区间对(2-60)式积分一次得

$$m[\dot{x}(0^+)-\dot{x}(0^-)]+0+0=1 \tag{2-63}$$

将(2-61)代入(2-62B)、(2-63)，可得 $t=0^+$ 的初始条件

$$x(0^+)=0,\quad \dot{x}(0^+)=\frac{1}{m} \tag{2-64}$$

而(2-60)式的齐次方程(代表自由振动)的解为

$$x=A\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t+\varphi)$$

将 $t=0^+$ 的初始条件[(2-64)式]代入上式，即得到单位冲击响应 $h(t)$

$$h(t)=\frac{1}{\omega_d m}=\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_d t\quad (当\ t>0\ 时) \tag{2-65A}$$

若单位冲击作用于 $t=\tau$ 时，则在 $t>\tau$ 和 $t<\tau$ 时的响应分别为

$$\left.\begin{aligned}h(t-\tau)&=\frac{1}{\omega_d m}\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau) &&(t>\tau\ 时)\\ h(t-\tau)&\equiv 0 &&(t<\tau\ 时)\end{aligned}\right\} \tag{2-65B}$$

$h(t)$ 或 $h(t-\tau)$ 均表示单位冲击响应，称为**系统的冲击响应函数**。

2. 任意激励的响应

设在时间 τ 有一子冲击(图 2-27)，并且将子冲击面积定义为子冲击强度，则在时间 τ 的子冲击强度为 $F(\tau)\Delta\tau$。由于 $\Delta\tau$ 很小，可以认为在与该区间的单位冲击响应相同，故该子冲击的响应为

$$F(\tau)\mathrm{d}\tau h(t-\tau)$$

根据叠加原理，假设任意激励的作用区间为 0 到 t，则任意激励的响应为

$$x(t)=\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-66}$$

将(2-65B)式代入上式，则

$$x(t)=\frac{1}{\omega_d m}\int_0^t F(\tau)\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-67}$$

(2-66)、(2-67)式就称为**褶积积分或杜哈美积分**。

若忽略阻尼，$\xi=0$，$\omega_d=\omega_n$，则上式变成

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2-68}$$

若系统不是零初始条件，设 $x(0)=x_0,\dot{x}(0)=\dot{x}_0$，则应叠加上有阻尼自由振动解。其全解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\xi\omega_n t}(x_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{x}_0+\xi\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t)+\int_0^t F(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2-69)$$

如果系统是在支承运动下振动，该支承运动位移 $x_\xi(\tau)$ 是可微的任意时间函数，则此时相当于系统上作用了两个激振力 kx_s 与 $c\dot{x}_s$，其运动微分方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=kx_s+c\dot{x}_s$$

根据线性叠加原理，应用杜哈美积分可得系统的响应

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t(kx_s+c\dot{x}_s)\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$
$$\frac{1}{\omega_d}\int_0^t(\omega_n^2x_s+2\xi\omega_n\dot{x}_s)\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2-70)$$

当支承运动是用加速度的任意函数 $\ddot{x}_s(\tau)$ 描述时，这时引入相对位移比较方便。以 $y=x-x_s$ 表示质量 m 的相对位移，由图 2-29，运用牛顿运动定律知运动方程为

$$m\ddot{x}=-k(x-x_s)-c(\dot{x}-\dot{x}_s)$$

因为 $y=x-x_s$

故 $$\ddot{y}=\ddot{x}-\ddot{x}_s,\qquad \ddot{x}=\ddot{y}+\ddot{x}_s$$

运动方程可改写成

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=-m\ddot{x}_s$$

由上式可以看出，只要把 $(-m\ddot{x}_s)$ 作为激励力，按任意激励情况处理即可。由杜哈美积分表达式知相对位移

$$y=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t(-m\ddot{x}_s)\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau=$$
$$-\frac{1}{\omega_d}\int_0^t\ddot{x}_s\mathrm{e}^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (2-71)$$

绝对位移则为

$$x=y+x_s$$

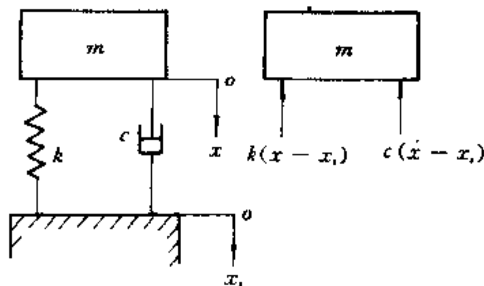


图 2-29

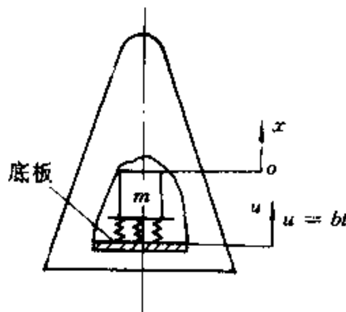


图 2-30

例 2-7　导弹头部装有带减震装置的仪器组件（图 2-30），当垂直点火发射时，底板具有随时间直线增加的加速度：$\ddot{u}=bt$，b是常数。若仪器组件质量为m，求发射时仪器组件相对于底板的位移和它的绝对加速度（忽略阻尼）。

解　设仪器相对于底板的位移为 y，即

$$y=x-u \qquad \ddot{x}=\ddot{y}+\ddot{u}$$

由(2－71)式，并考虑$\xi=0$可得

$$y=-\frac{1}{\omega_d}\int_0^t b\tau e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau=$$
$$-\frac{b}{\omega_n}\int_0^t \tau\sin\omega_n(t-\tau)d\tau=$$
$$-\frac{b}{\omega_n^2}(t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t)$$

相对加速度为

$$\ddot{y}=-\frac{b}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

仪器组件的加速度为

$$\ddot{x}(t)=\ddot{y}(t)+\ddot{u}(t)=bt(1-\frac{1}{\omega_n t}\sin\omega_n t)。$$

二、拉普拉斯变换法

从上述各节讨论的结果可以看出，单自由度线性系统振动的运动方程为二阶常微分方程；由工程数学知道，此方程可用拉普拉斯变换法求得一种完全解。关于该方法的数学概念，读者可参考有关的数学专著，这里只是用它来解决任意激励的响应问题。

在任意激励下，单自由度粘性阻尼线性系统的运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

若初始条件为$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=\dot{x}_0$，对运动方程两边取拉普拉斯变换，并令$\bar{x}(s)=L[x(t)]$可得

$$m[s^2\bar{x}(s)-sx(0)-\dot{x}(0)]+c[s\bar{x}(s)-x(0)]+k\bar{x}(s)=\bar{F}(s)$$

由上式解出$\bar{x}(s)$

$$\bar{x}(s)=\frac{\bar{F}(s)}{ms^2+cs+k}+\frac{(ms+c)x_0+m\dot{x}_0}{ms^2+cs+k}$$

或
$$\bar{x}(s)=\frac{\bar{F}(s)}{m}\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{sx_0+2\xi\omega_n x_0+\dot{x}_0}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\qquad(2-72)$$

式中复变量$s=\sigma+i\omega$，ω表示圆频率，实变量σ是s的实部。显然，通过这一变换，我们将自变量由时间域转变到频率域。(2－72)式中右边第一项为强迫振动解，第二项表示由初始条件确定的瞬态解。如果系统有零初始条件，则

$$\bar{x}(s)=\frac{1}{m(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}\bar{F}(s)=\bar{H}(s)\bar{F}(s)\qquad(2-73)$$

式中
$$\bar{H}(s)=\frac{1}{m(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}=\frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)}\qquad(2-74)$$

$\bar{H}(s)$称为**系统的传递函数**。若用方框图来表示(2－73)则如图2－31所示，它说明，传递函数就是输入与输出的拉普拉斯变换的比值。

将(2－65A)式进行拉普拉斯变换后与(2－74)式进行比较，可以发现，传递函数与单位冲击响应函数有如下关系

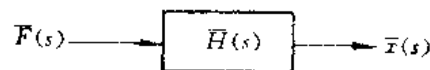


图 2－31

$$\left.\begin{aligned}h(t)&=L^{-1}[\bar{H}(s)]\\ \bar{H}(s)&=L[h(t)]\end{aligned}\right\}\qquad(2-75)$$

若设 $s=\mathrm{i}\omega$，将它代入 $\overline{H}(s)$，则得到 $\overline{H}(\mathrm{i}\omega)$ 或 $\overline{H}(\omega)$，并称之为**频率响应函数**。它描绘了系统的频率特性。由(2-73)式可以看出，如果系统的传递函数 $\overline{H}(s)$ 为已知，则将它与任意输入的拉普拉斯变换 $\overline{F}(s)$ 相乘，就可以求得 $\overline{x}(s)$。对 $\overline{x}(s)$ 作拉普拉斯逆变换，可得到系统的响应 $x(s)$，即

$$x(t)=L^{-1}[\overline{X}(s)]$$

拉普拉斯变换法的优点是：为运动方程求解提供了一种规格化解法，它将运算由时间 t 域转变到 s 域或频率域；使振动微分方程运算变成代数运算；经拉普拉斯变换的方程自然地含有初始条件，故可求得含有初始条件的非齐次方程的解；尤其是能与现代测试技术结合起来，显示其求解的优越性。

例 2-8 对单自由度线性系统(如图 2-32 所示)，用拉普拉斯变换法求具有零初始条件的阶跃力 F_0 的响应。

解 这种阶跃力 F_0 可用单位阶跃函数

$$u(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geqslant 0)\end{cases}$$

表示为 $F_0u(t)$。因此运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0u(t)$$

或

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{F_0}{m}u(t) \tag{2-76}$$

因为 $x(0)=0,\dot{x}=0$，对(2-76)式两边进行拉普拉斯变换；由 $L[F_0u(t)]=\frac{F_0}{s}$，考虑(2-73)式可得

$$\overline{x}(s)=\overline{H}(s)\overline{F}(s)=\frac{1}{m(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}\frac{F_0}{s}$$

则

$$\frac{\overline{x}(s)}{F_0}=\frac{1}{m(s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2)}\frac{1}{s}$$

按部分分式展开后可得

$$\frac{\overline{x}(s)}{F_0}=\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)}-\frac{\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\xi^2)}\right\}$$

再对上式求拉普拉斯逆变换得

$$\frac{x(t)}{F_0}=\frac{1}{k_0}\left\{1-\mathrm{e}^{-\xi\omega_nt}\left(\cos\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right)\right\}=A(t) \tag{2-77}$$

$A(t)$ 表示单位阶跃输入的响应，称为单位阶跃响应函数。由(2-77)式即可导出阶跃力 F_0 的响应

$$x(t)=F_0A(t)=\frac{F_0}{k}\left\{1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{e}^{-\xi\omega_nt}\cos(\omega_dt-\phi)\right\} \tag{2-78}$$

式中

$$\phi=\operatorname{arccot}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

用无量纲形式表示，此响应曲线如图 2-33 所示。

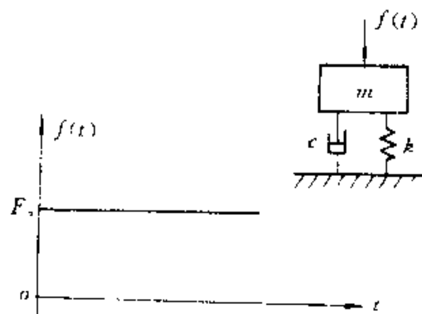


图 2-32

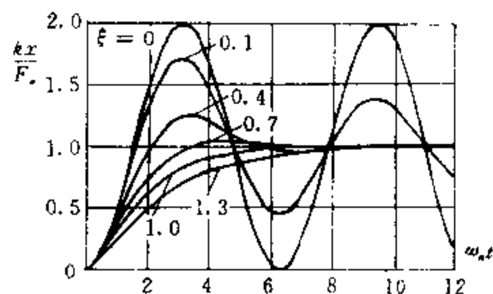


图 2-33

§2.6 阻尼理论

前面的讨论都是以粘性阻尼为前提的，实际工程问题中则不一定如此。各种实际结构的阻尼力及其产生的机理是复杂的。一般说来，阻尼基本上可分为三种不同类型，即粘性阻尼、材料内部阻尼（结构阻尼）和库仑（Coulomb）摩擦阻尼。对这些阻尼的处理目前基本上有两种理

种是将各种阻尼折算成等效粘性阻尼，用前面介绍的建立在粘性阻尼基础上的理论来分

析问题，称为**当量粘性阻尼理论**；另一种是**复阻尼理论**。

一、当量粘性阻尼理论

如前所述，当量粘性阻尼的基本思想是把非粘性阻尼折算成等效粘性阻尼，通常是用等效

作的功为 $F_\mu A$，而

$$F_\mu = \mu F_N$$

式中 μ—— 干摩擦系数；

F_N—— 正压力或法向力。

故在整个周期内摩擦力作的总功为

$$W_c = 4\mu F_N A$$

将上式代入(2－79)式得

$$C_{eq} = \frac{4\mu F_N A}{\pi\omega A^2} = \frac{4\mu F_N}{\pi\omega A} \tag{2-80}$$

则在简谐激励 $F(t) = F_0\sin\bar{\omega}t$ 作用下运动方程为

$$m\ddot{x} + \frac{4\mu F_N}{\pi\omega A}\dot{x} + kx = F_0\sin\bar{\omega}t$$

其稳态响应振幅由(2－37B)式知

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-\bar{\omega}^2 m)^2 + (\bar{\omega}c_{eq})^2}} \tag{2-81}$$

将(2－80)式代入(2－81)式，可导出此情况的动力放大系数

$$D = \frac{X}{F_0/k} = \sqrt{\frac{1-(4\mu F_N/\pi F_0)^2}{(1-\beta^2)^2}} \tag{2-82}$$

因为 X 是实数，所以上式只有在$(4\mu F_N/\pi F_0) < 1$ 的情况下才正确。

2. 结构阻尼

由物质内部分子间的摩擦产生的阻尼称为结构阻尼或材料阻尼。大量实验证明，对于大多数结构金属(如钢和铝)，其结构阻尼在一个周期内所消耗的能量与振幅平方成正比，而在很大的频率范围内与频率无关。故 W_c 可表达为

$$W_c = \alpha A^2$$

式中 α—— 常数。

由(2－79)式知

$$c_{eq} = \frac{\alpha A^2}{\pi\omega A^2} = \frac{\alpha}{\pi\omega} \tag{2-83}$$

用 c_{eq} 取代 c，则在简谐激励下具有结构阻尼的系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi\omega}\dot{x} + kx = F_0\sin\bar{\omega}t \tag{2-84}$$

二、复阻尼理论

令 $h = \frac{\alpha}{\pi}$，则上式(2－84)的复数形式为

$$m\ddot{x} + \mathrm{i}hx + kx = F_0 e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}$$

得

$$m\ddot{x} + k(1+\mathrm{i}\eta)x = F_0 e^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \tag{2-85}$$

式中 η—— 损失系数或结构阻尼因子，且 $\eta = \frac{h}{k}$ (2－86)

η可由实验测定。不同材料的η值相差很大：金属的$\eta = 10^{-3} \sim 10^{-2}$，橡胶、高分子聚合物的$\eta =$

0.5 ~ 2.0，高的可达5.0。

$k(1+i\eta)$ 叫做**复刚度**，以 k_c 表示。(2-85)式可写成

$$m\ddot{x}+k_c x=F_0 e^{i\omega t}$$

上式相当于把原有阻尼的弹簧质量系统简化为等效的无阻尼弹簧质量系统，不过弹簧刚度为复量。这样，考虑非粘性阻尼时，只需要刚度项乘$(1+i\eta)$，就可以按无阻尼系统处理。但前提条件是：在简谐运动情况下这个方法才是正确的。这个方法显然也可用来处理库仑摩擦阻尼情况。

习　题

2-1　以弹簧悬挂的物体，使弹簧有静伸长 δ_s。设将物体向下拉，使弹簧有静伸长 $3\delta_s$，然后以初速度 v_0 向上运动，求此后物体的振动方程。

答：$x=\sqrt{4\delta_s^2+\dfrac{\delta_s}{g}v_0^2}\cos\left(\sqrt{\dfrac{g}{\delta_s}}t+\varphi\right)$，$\varphi=\arctan\dfrac{2\sqrt{g\delta_s}}{v_0}$

2-2　以弹簧悬挂的物体，质量为 m，自由振动的周期为 T。设在物体 m 上附加一个质量 m_1，则弹簧的静伸长增加 l，求当地的重力加速度。

答：$g=\dfrac{4\pi^2 ml}{m_1T^2}$

2-3　物体的质量 $m=3.2$ kg，在绕水平轴 O 摆动时(图2-3)，周期为 $T=1.15$ s。设由质心 A 至转轴 O 的距离为 $a=7.9$ cm，求物体对于水平轴 O 与水平轴 A 的转动惯量 J_O 与 J_A。

答：$J_O=1\ 320.7\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2$　$J_A=1\ 121.0\ \text{kg}\cdot\text{cm}^2$

2-4　衰减振动的振幅，在振动10次的过程中，由 $x_1=3.0$ cm 缩小到 $x_{11}=0.06$ cm，求对数缩减率 δ。

答：$\delta=0.391$

2-5　质量为 m 的物质，挂在弹簧下端，产生静伸长 δ_s，在上下运动时所遇到的阻力与速度 v 成正比。要保证物体不发生振动，求阻尼系数 c 的最低值。

答：$c=2m\sqrt{\dfrac{g}{\delta_s}}$

2-6　挂在弹簧下端的物体，质量为5.88 kg，进行上下振动，在无阻尼时，周期为 $T_1=0.4\pi$ s；在有与速度 v 成正比的阻尼 cv 时，周期为 $T_2=0.5\pi$ s。设在开始运动时，物体在静平衡位置下面4 cm，速度为零。求阻尼因子 ξ 及此后的运动规律。

答：$\xi=0.6$，$x=5e^{-3t}\sin(4t+\varphi)$ cm，$\tan\varphi=\dfrac{4}{3}$

2-7　挂在弹簧下端物体的质量为0.49 kg，弹簧系数为1.96 N/cm，求在铅垂干扰力 $F=2.3\sin8\pi t$ N 作用下强迫振动的规律。

答：$x=-2.0\sin8\pi t$ cm

2-8　某部件在液体中振动，扰力 $F=50\sin\omega t$ N，在周期 $T=0.20$ s 时发生共振，振幅为0.50 cm，求阻尼系数 c。

答：$c=3.18\ \text{N}\cdot\text{s/cm}$

2-9　一个附于弹簧上的物体，承受干扰力 $F_0\cos\omega t$，该物体在地面上滑动时，If受物体的

摩擦阻力为 R，试确定稳态强迫振动的振幅（见习题 2－9 图）。

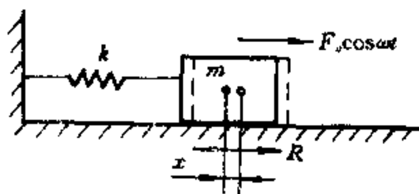
答：$A=\sqrt{F_0^2-(4R/\pi)^2}/(k-m\omega^2)$

2－10　利用力的叠加原理，求弹簧质量系统对图（习题2－10图）力函数的响应。系统初始时处于静止。

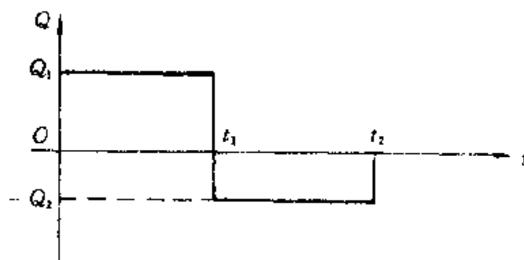
答：$x=\dfrac{Q_1}{k}(1-\cos\omega_n t)\quad(0\leqslant t\leqslant t_1)$

$$x=\frac{Q_1}{k}[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n t]-\frac{Q_2}{k}[1-\cos\omega_n(t-t_1)]\quad(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$$

$$x=\frac{Q_1}{k}[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n t]-\frac{Q_2}{k}[\cos\omega_n(t-t_2)-\cos\omega_n(t-t_1)]\quad(t\geqslant t_2)$$



习题　2－9 图



习题　2－10 图

2－11　干扰力按线性关系逐渐增加，然后突然停止，如图（习题 2－11 图）所示，试确定单自由度有阻尼系统的响应函数。

答：$x=\dfrac{Q_1}{k}\dfrac{1}{t_1}\left\{t-\dfrac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n^2}\left[\dfrac{\omega_d^2-\xi^2\omega_n^2}{\omega_d}\sin\omega_d t-2\xi\omega_n\cos\omega_d t\right]-\dfrac{2\xi}{\omega_n}\right\}\quad(0\leqslant t\leqslant t_1)$

$$x=\frac{Q_1}{k}\left[\frac{t}{t_1}-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n^2 t_1}\left(\frac{\omega_d^2-\xi^2\omega_n^2}{\omega_d}\sin\omega_d t-2\xi\omega_n\cos\omega_d t\right)-\frac{2\xi}{\omega_n t_1}\right]-$$

$$\frac{Q_1}{k}\left\{1-e^{-\xi\omega_n(t-t_1)}\left[\cos\omega_d(t-t_1)+\frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d(t-t_1)\right]\right\}-$$

$$\frac{Q_1}{k}\left\{\frac{t-t_1}{t_1}-\frac{e^{-\xi\omega_n(t-t_1)}}{\omega_n^2 t_1}\left[\frac{\omega_d^2-\xi^2\omega_n^2}{\omega_d}\sin\omega_d(t-t_1)-2\xi\omega_n\cos\omega_d(t-t_1)\right]-\frac{2\xi}{\omega_n t_1}\right\}$$

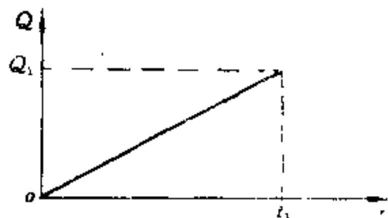
$(t\geqslant t_1)$

2－12　设支座位移为斜坡函数 $y=vt$（即以匀速 v 作直线平动），求单自由度有阻尼振动系统的响应。

答：$x=v\left(t-\dfrac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$

2－13　飞机仪表板连同仪表共重 196 N，四角各有一个橡皮垫块，每块的弹簧系数为19.6 N/mm。试估计在发动机转速为 3 000 r/min 与 6 000 r/min 情况下，振动传递到仪表的百分比，阻尼可以不计。

答：$\dfrac{1}{24}$，$\dfrac{1}{100}$



习题　2－11 图

2－14　用拉普拉斯变换法求一弹簧质量系统在力 $F(t)=F_0\mu(t)$ 作用下的响应。F_0 为常数，$\mu(t)$ 为单位阶跃函数。设 $t=0$ 时，$x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$。

答： $\bar{x}(s)=\frac{F_0}{k}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right]+\frac{x_0 s}{s^2+\omega_n^2}+\frac{\dot{x}_0}{s^2+\omega_n^2}$

$$x(t)=L^{-1}[\bar{x}(s)]=$$

$$\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)+x_0\cos\omega_n t+\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

2-15　在上题中，若考虑阻尼，且设 $t=0$ 时，$x_0=0$，$\dot{x}_0=0$，再用拉普拉斯变换法求系统的响应。

答： $\bar{x}(s)=\frac{F_0}{m\omega_n^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s+2\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right]$

$$x(t)=L^{-1}[\bar{x}(s)]=$$

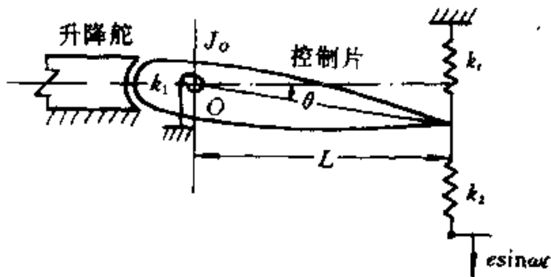
$$\frac{F_0}{k}\left[1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi\omega_n}{\omega_d}\sin\omega_d t)\right]$$

2-16　一物体在流体中以中等速度运动，受到与速度平方成正比的阻尼，当该物体受扰力 $F_0\cos\omega t$ 作用时，试确定此系统共振时的振幅。

答： $A=\sqrt{3\pi F_0/8a\omega^2}$，(设阻尼为 $F_d=a\dot{x}^2$)

2-17　飞机升降舵的控制片，如图所示，对转轴 O 的转动惯量 J_0 是已知的，但抗扭弹簧刚度系数 k_t(由于操纵杆系比较复杂)很难估计。因此，控制片绕轴 O 扭振的固有频率 f 不能从公式 $f=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_t}{J}}$ 算出，而须用实验来确定。将升降舵固定，通过两个弹簧 k_1 和 k_2 使控制片强迫振动，改变扰频 ω 使控制片发生共振，测定共振频率 ω_r。试导出计算固有频率 f 的公式，弹簧系数 k_1，k_2 与距离 L 假定都是已知的。

答： $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_r^2-\frac{(k_1+k_2)L^2}{J_0}}$



习题　2-17 图

第三章　多自由度系统的振动

§3.1　前　　言

在实际工程中，大量的振动课题都属于多于一个自由度的系统的振动问题。动力系统自由度的数目，等于描述该系统运动状态所必需的最少独立坐标数。n 个自由度的动力系统的振动，就需要 n 个独立坐标来描述。这就带来一系列新的振动概念和规律。振动的基本概念基本上已在前两章介绍了，本章主要讨论多自由度系统振动的特殊概念和规律。研究的方法、步骤与单自由度情况是一样的。由于在多自由度系统中二自由度系统最简单，研究起来简单明了，并且在系统所表现出来的振动特性上与多自由度系统没有本质区别，因此，本章从二自由度系统着手研究，然后推广到多自由度系统上。

§3.2　运动方程的建立

在研究单自由度系统时，我们采用的方法之一，是用牛顿运动定律从动平衡观点直接导出运动方程。在多自由度系统中，使用此法就需要对每个质量件逐个取分离体，分别对它们进行受力分析，并且还需要引入一些未知的约束反力，故很不方便。因此，本章介绍一种分析力学的方法，它从能量观点并从系统总体出发，利用拉格朗日方程来导出运动方程。

建立运动方程，首先要选择能完全描述系统运动状态的合适的参量。对于复杂的动力系统，需要把坐标的概念抽象化并加以扩充，即采用**广义坐标**。所谓广义坐标，就是任何一组足以确定系统运动状态的独立参量。例如，在图 3-1 所示的系统中，半径为 a 的圆盘在它自身所在的 xy 平面内沿直线 ox 运动时，如果圆盘与轨道之间可以滑动，可取 x_c 与 φ 为广义坐标，自由度为 2。当不允许滑动时，则圆盘只能沿直线 ox 滚动，圆盘在 D 点的线速度为零。此时的约束方程为

$$\dot{x}_c - a\dot{\varphi} = 0$$

由于此约束方程是可以积分的，故系统的约束方程为

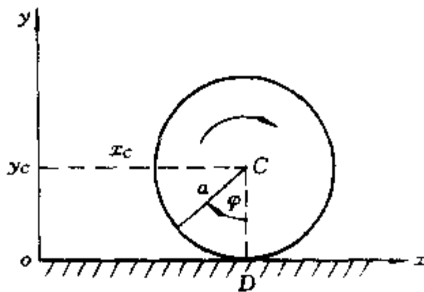


图　3-1

$$x_c - a\varphi + C = 0$$

C 为积分常数。显然，系统只有一个独立的广义坐标了；自由度数为 1。

由此约束方程可以看出，方程中不显含时间变量 t，这种约束方程所描述的约束称为**定常约束**。如果约束方程中显含时间变量 t，但不包含坐标对时间的导数，则称这类约束为**完整约束**。如果约束反力在虚位移上所作元功之和为零，则称这类约束为**理想约束**。下面讨论的系统

只限于具有完整约束和理想约束。由理论力学可知，在这种系统中，广义坐标的个数等于系统的自由度数目。具有不完整约束的系统，其自由度数不等于广义坐标数，而是小于广义坐标数。

广义坐标在复杂系统中不一定有明显的物理意义。例如，要描述图 3-2 所示的悬臂机翼受扭矩 m_1, m_2, m_3 作用时系统的运动状态，可用扭角曲线来描述。也可用另一形式，把扭角曲线展开成三角级数

$$\theta(y) = a_1 \sin\frac{\pi y}{2l} + a_2 \sin\frac{3\pi y}{2l} + \cdots + a_m \sin\frac{(2m-1)\pi y}{2l} + \cdots$$

式中 m 为正整数。显然，只要给出系数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m \cdots$，扭角曲线就完全确定了，因此这些系数起到了坐标的作用，可取作广义坐标，但物理意义却难以表达。

在动力学中，振动体的广义坐标是随时间而变的。我们把广义坐标对时间的一次和二次导数依次称为**广义速度**和**广义加速度**。

本节的基本思想是用广义坐标来描述系统的运动，表达系统的动能 T、势能 U、功 W 等标量以及它们之间的关系。从动力学普遍方程出发导出拉格朗日方程，从而导出建立复杂系统振动微分方程（运动方程）的新方法。这种方法的优点主要是，可以避免未知约束反力的出现，有着统一的步骤与格式，是建立复杂系统运动方程的一种简便有效的方法。

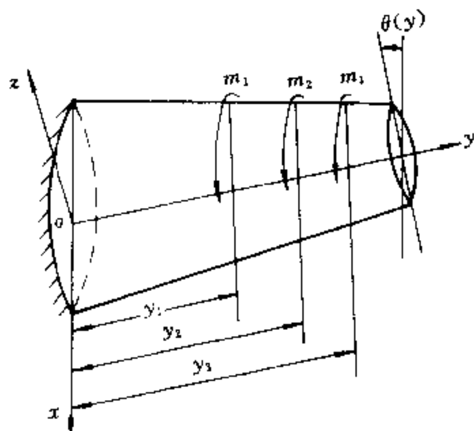


图 3-2

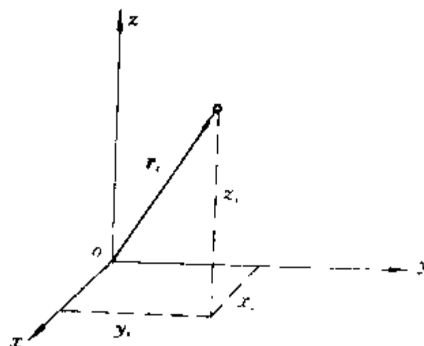


图 3-3

一、虚位移原理与广义力

我们用坐标向量 $\boldsymbol{r}_i$ 来确定空间任意一质量点 i 的位置（图 3-3）。如果系统在考虑约束条件后有 n 个自由度，则对于定常约束的完整系统，用 n 个广义坐标与时间 t 可完全描述其运动。设这 n 个广义坐标为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$。系统中任意一点 i 的位置用坐标向量 $\boldsymbol{r}_i$ 表达为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

将上式对时间 t 求一阶导数即得 i 点的速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\boldsymbol{r}_i \tag{3-14}$$

对于定常约束情况 $\boldsymbol{r}_i$ 不显含 t，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = 0$，

则有

$$\dot{r}_i = \frac{\mathrm{d}r_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \tag{3-1B}$$

式中 $\dot{q}_j$—— 广义速度，即 $\dot{q}_j = \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}$。

为了讨论虚位移原理，我们用广义坐标来表示虚位移 —— 约束许可的坐标的微小改变量（它不一定是实际运动的真实位移，且与时间无关）。虚位移是假想坐标的瞬时改变量，用符号 δ 来表示，系统内任意一点 i 的虚位移 δr_i，可以表示为广义坐标的虚位移 δq_i 的线性组合，即

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{3-2}$$

所谓虚位移原理，就是在理想约束下，质点系平衡的必要而充分的条件为：所有主动力在虚位移上所做元功之和等于零。设系统中任意一点 i 上作用的主动力的合力为 F_i，则其主动力虚功 $\delta W(F_i)$ 之和可表示成

$$\delta W = \sum_i \delta W(F_i) = \sum_i F_i \delta r_i$$

式中符号 $\sum_i$ 表示对系统的全部质点求和。

将(3-2)式代入上式得

$$\delta W = \sum_i F_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

改变求和次序，可以得到主动力虚功之和的广义坐标表达式

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j \tag{3-3}$$

式中

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \tag{3-4}$$

Q_j 叫做对应于广义坐标 q_j 的广义力。它的量纲和 q_j 的量纲有关，它由 $Q_j\delta q_j$ 乘积的量纲是功的量纲来决定。例如，选取角度为广义坐标时，对应的广义力便是力矩。根据(3-3)式，可用广义坐标、广义力将虚位移原理表示成下式

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j = 0 \tag{3-5}$$

因为 δq_j 为广义坐标 q_j 的独立虚位移，可以任意选择，故(3-5)式成立时有

$$Q_j = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-6}$$

这说明在理想约束条件下，n 个自由度系统平衡的必要和充分条件是：n 个广义力 Q_j 均等于零。

二、动能与势能

1. 动能

由理论力学知道，质量为 m_i 的任意一质点的动能 T_i 为

$$T_i = \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i\dot{r}_i$$

系统总动能应为各质点动能之和，故

$$T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

将(3-1B)式代入上式，就得到定常约束条件下用广义坐标表示的系统动能 T

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \right)$$

改变求和次序得

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{3-7}$$

式中 m_{jk} —— 广义质量系数，并且

$$m_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{3-8}$$

由(3-8)式可知 $m_{jk} = m_{kj}$。在微振动理论中，若广义坐标一律取静平衡位置作为原点，则在振动过程中 q 是偏离平衡位置的小量。将系数 m_{jk} 在平衡位置附近按台劳级数展开：

$$m_{jk} = (m_{jk})_0 + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_s}\right)_0 q_s + \cdots$$

[illegible]

需保留第一项 $(m_{jk})_0$，这样，本来是坐标函数的 m_{jk}，现在变成在平衡位置取值的常数，即

$$m_{jk} \approx (m_{jk})_0$$

(3-7)式可改写为

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(m_{jk})_0\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{3-9}$$

写成矩阵表达式，则动能为

$$U = -W = U(q_1 q_2 \cdots q_n) \tag{3-12}$$

当 q 有微小变化时，在势力场中元功可以表示成函数 U 的全微分。为了与虚位移上的元功 $\delta W'$ 相区别，我们用符号 d 表示，则有

$$dU = -dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_j} dq_j \tag{3-13}$$

如果上式中 dq_j 代表系统的虚位移，则(3-13)式也代表有势力的虚功。将(3-13)式与虚功表达式(3-3)相比较，可得如下关系

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-14}$$

可见，势能不仅有本身的物理意义，而且通过它可以表示势力场中的广义力，可用于计算广义力 Q_j。由(3-6)式可知，在势力场中，系统平衡的必要、充分条件是

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3-15}$$

在微振动理论中，我们通常取静平衡位置为 q_j 的原点，则在此原点 $U_0 = 0$，$(q_1)_0 = (q_2)_0 = \cdots = (q_n)_0 = 0$，而且 q_j 是小量。将势能在平衡位置附近按台劳级数展开得

$$U = U_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0 q_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 q_j q_k + \cdots \tag{3-16}$$

$\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0$ 表示在静平衡位置取值，根据(3-15)式知

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)_0 = 0$$

考虑到平衡位置附近按微振动理论只保留能量中的二阶项就足够了，则(3-16)式可化简为

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 q_j q_k = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} k_{jk} q_j q_k \tag{3-17}$$

式中 k_{jk}—— 刚度系数；是势能对广义坐标的二阶偏导数在平衡位置取值，所以它是常数，而且

$$k_{jk} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right)_0 \tag{3-18}$$

由(3-18)式可见，刚度系数有对称性，即

$$k_{jk} = k_{kj}$$

将(3-17)式改写成矩阵表达式，则有

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{q} \tag{3-19}$$

式中 $\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{q}^T$ —— 广义坐标列阵及其转置，且 $\boldsymbol{q} = [q_1\ q_2 \cdots q_n]^T$。

$\boldsymbol{K}$ —— 广义刚度矩阵，简称刚度矩阵，且

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & \cdots & \boldsymbol{K}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{K}_{n1} & \boldsymbol{K}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{K}_{nn} \end{bmatrix} \tag{3-20}$$

由于系统因弹性变形而储存的势能总是大于零的，U 是正定二次型，因而对应的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 也是正定的。但是，若系统的 q_j 中有刚体位移，势能 U 除了 q_j 全等于零的情况外，它还可能存在某些 q_j 不等于零而势能 U 却等于零的情况。对这种情况在线性代数中称 U 为半正定二次型，$\boldsymbol{K}$ 是半正定的。此时 $\boldsymbol{K}$ 的全部主子行列式的值除了大于零外，有的等于零，本书讨论的 $\boldsymbol{K}$ 包括正定及半正定的情况。

三、拉格朗日方程

虚位移原理是在静力平衡的基础上建立起来的。由理论力学可以知道，利用达朗贝尔原理，把主动力 F_i 与惯性力 $-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 之和作为新的作用在质点 i 上的合力，可使虚位移原理由静力学领域扩展到动力学领域。此时，在理想约束下，作用于系统上的所有主动力和惯性力在任意瞬时虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_i$ 上所作虚功之和等于零，即

$$\delta W = \sum_i (F_i - m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i F_i\delta\boldsymbol{r}_i - \sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\delta\boldsymbol{r}_i = 0 \tag{3-21}$$

这就是动力学普遍方程。m_i，$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 依次表示质点 i 的质量和加速度。式中第一个和式是主动力的虚功，由(3-3)式知

$$\sum_i F_i\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j\delta q_j \tag{3-22}$$

(3-21)式的第二个和式表示虚加于系统的惯性力系所作的虚功，由(3-2)式知此虚功为

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\delta\boldsymbol{r}_i = \sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \tag{3-23}$$

上式括号内的数量积可以写成

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = m_i\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\right\} \tag{3-24}$$

考虑到各广义速度是彼此独立的，故将(3-1B)式两边对 $\dot{q}_j$ 求导后得

$$\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{3-25}$$

考虑到微分次序可以对换，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} \tag{3-26}$$

将(3-25)、(3-26)代入(3-24)可得

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = m_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} =$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)$$

将上式对全部质点求和则有

$$\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\right) \tag{3-27}$$

将上式代入(3-23)式，考虑到系统的动能表达式为

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

则有

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \tag{3-28}$$

将(3-22)、(3-28)代入(3-21)得

$$\sum_{j=1}^{n} \left(Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \tag{3-29}$$

显然，上式对于任意的δq_j均应满足。考虑到虚位移δq_j都是独立的，故上式各项中δq_j的系数都应分别为零，于是可得n个二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-30}$$

这就是**拉格朗日方程**。式中Q_j包含了系统中所有主动力的贡献，它一般包括有势力、阻尼力和外作用力的贡献。

当主动力仅为有势力时，考虑到(3-14)式和(3-30)式可得到保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-31A}$$

引入$L = T - U$（它表示系统的动能与势能之差，叫做拉格朗日函数或算子），则上式可改写成另一形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-31B}$$

当系统除了有势力的作用外还有非有势力（如阻尼力、外激励力等）的作用时，用Q_j^D、Q_j^F依次表示与阻尼力、外激励力相对应的广义力，则可将拉格朗日方程推广到保守系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - Q_j^D = Q_j^F \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-32A}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - Q_j^D = Q_j^F \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-32A}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j^D = Q_j^F \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{3-32B}$$

式中，势能 U 包括重力和弹性元件所贮藏的应变能的贡献，但因为我们规定位移是相对于静平衡位置量起的，故重力对应变能的贡献不需考虑，势能函数 U 只考虑弹性元件的应变能。

应用拉格朗日方程解决具体问题时一般步骤为：

(1) 判断系统的自由度数，适当选取广义坐标；

[illegible]

(2) 写出用广义坐标表示的势能、动能表达式；

(4) 将动能、势能及广义力代入(3-32)式或(3-35)式，经过运算即可求出系统的运动方程。

四、多自由度系统的运动方程

如前所述，建立多自由度系统微振动的运动方程可以用牛顿运动定律，但不方便。我们采用分析力学的方法，通过选择广义坐标，利用拉格朗日方程来列方程。设有 n 自由度定常约束的理想系统，为了不失一般，假定作用于动力系统上的力，除了有势力外，还有非有势的外激励力及阻尼力。当系统在静平衡位置附近作微振动时，由前面的分析可知：

系统动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad 或 \quad T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}$$

系统势能

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}q_i q_j \quad 或 \quad U = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}$$

耗能函数

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad 或 \quad D = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}$$

将上述三式代入(3-35)式可得

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}^F \tag{3-36}$$

解　系统具有两个自由度，我们采用机翼刚心偏离平衡位置的距离 h（向下为正）和翼段绕刚心的转角 α（由静平衡状态量起，翼段抬头为正）作为广义坐标，并认为机翼的旋转中心在刚心上。于是机翼的动能由随质心的平动动能和绕质心的转动动能两部分组成，即

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{h} + e\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + me\dot{h}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}(I_G + me^2)\dot{\alpha}^2 =$$
$$\frac{1}{2}m\dot{h}^2 + S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}I_\alpha\dot{\alpha}^2$$

翼段的势能则为

$$U = \frac{1}{2}K_h h^2 + \frac{1}{2}K_\alpha\alpha^2$$

如果升力 Y 向上为正，气动力矩 M_α 抬头为正，则气动力对虚位移 $\delta h,\delta\alpha$ 所做的虚功为

$$\delta W = -Y\delta h + M_\alpha\delta\alpha$$

将上式与(3-5)式对比，可知广义力为

$$Q_h = -Y,\quad Q_\alpha = M_\alpha$$

将动能、势能及各广义力代入拉格朗日方程(3-35)，可推导出系统做微振动的运动方程

$$m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha} + K_h h = -Y$$
$$S_\alpha\ddot{h} + I_\alpha\ddot{\alpha} + K_\alpha\alpha = M_\alpha \qquad (3-38A)$$

写成矩阵表达式

$$\begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y \\ M_\alpha \end{bmatrix} \qquad (3-38B)$$

将上式同(3-36)式相比可知

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\alpha \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}^F = \begin{bmatrix} -Y \\ M_\alpha \end{bmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix}$$

当外力不存在时，(3-38)式变成无阻尼自由振动方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = 0 \qquad (3-39)$$

§3.3　无阻尼自由振动

一、主坐标

无阻尼自由振动运动方程的一般形式为(3-39)式。为简明起见，我们从二自由度着手。由(3-38A)式中每一方程都包含着两个变量可知，用坐标 h 表示的弯曲振动和用坐标 α 表示的扭转振动并不是彼此独立的，故将第一方程的 $S_\alpha\ddot{\alpha}$ 和第二方程的 $S_\alpha\ddot{h}$ 项叫做**耦合项**。因为它们若不存在，则各方程变成了独立的单自由度系统的运动方程，因此可以应用单自由度振动理论求解。正是有了耦合项，使问题求解变得困难。如果耦合项包含有广义加速度，则说明是惯性力耦合，此时系统的质量阵为非对角阵，称这种情况为**惯性耦合或动力耦合**，如(3-37)式所示。如果广义刚度矩阵为非对角阵，耦合项是弹性力项，则称此情况为**弹性耦合或静耦合**。也有可能两种耦合同时存在。然而，对于客观存在的运动，可以采用任何一组独立变量作为广义坐标来描述它。坐标的变换可以改变系统的描述形式，而不会改变系统的动力性能。因此，我们可以进行适当的坐标变换来消除耦合项，这叫**解耦**。实现解耦以后，n 自由度系统的 n 个含有耦合项

的运动方程，就转化成 n 个独立的单自由度运动方程。能使多自由度系统运动方程解耦的广义坐标称为**主坐标**。采用主坐标，就可将多自由度系统的振动分析化简成若干单自由度系统的振动分析。如何求系统的主坐标将在下面介绍。

二、主振动

我们先从图 3-5 所示的二自由度系统的自由振动入手进行研究。这时广义坐标列阵为

$$q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

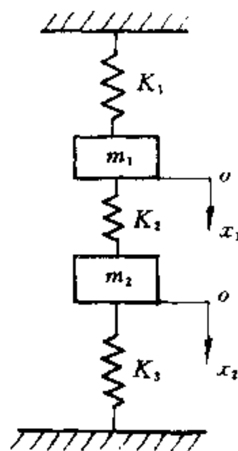


图 3-5

运动方程用牛顿定律列出为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-40}$$

显然，方程属静耦合情况。设振动时两质量做同频率、同相位的简谐振动，故可令其解为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{3-41}$$

式中 A_1、A_2 为待定常数，ω 为系统的固有圆频率。

将(3-41)式代入(3-40)式得

$$\left.\begin{aligned} &[(K_2 + K_1) - \omega^2 m_1]A_1 - K_2 A_2 = 0 \\ &-K_2 A_1 + [(K_2 + K_3) - \omega^2 m_2]A_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-42}$$

A_1、A_2 有非零解的条件为

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (K_2 + K_1) - \omega^2 m_1 & -K_2 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{3-43}$$

(3-43) 左端的行列式 $\Delta(\omega)$ 称为特征行列式，将上式展开得：

$$\omega^4 - (a + f)\omega^2 + (af - be) = 0$$

式中

$$a = \frac{K_1 + K_2}{m_1}, \qquad b = \frac{K_2}{m_1}$$

$$e = \frac{K_2}{m_2}, \qquad f = \frac{K_2 + K_3}{m_2}$$

此方程称为频率方程或特征方程，它的两个特征根为

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a + f}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a + f}{2}\right)^2 - (af - be)} = \frac{a + f}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a - f}{2}\right)^2 + be} \tag{3-44}$$

从上面分析的结果可以得出以下结论：

(1) 由于 $K_i, m_i (i = 1,2)$ 是正数，a、b、e、f 也是正数；从(3-44)式可以看出，ω_1^2、ω_2^2 都是实根。又因为 $af > be$，根式开方后的值总是小于$\frac{a + f}{2}$，所以 ω_1^2, ω_2^2 是正实根。由于 $-\omega$ 只不过改变了(3-41)式中 A_1, A_2 的符号，不是新的解，故频率方程(3-44)应有两个正实数解 ω_1、ω_2。

(2) ω_1、ω_2 仅取决于系统固有的物理性质(m_i, K_i)，而与其他条件无关，故称为系统的固有

圆频率。显然，二自由度系统有两个固有圆频率。以后将要证实，n 自由度系统有 n 个固有频率。习惯上把最小的固有频率称为**一阶固有频率**，简称**基频**。随着固有频率值的增加，依次称为第一、第二、…、第 n 阶固有频率。

(3) 将 ω_1、ω_2 分别代回方程组(3-42)时，我们不能求出 A_1，A_2 的具体数值，但可以求得对应于 ω_1、ω_2 的 A_1 与 A_2 之间两个固定的比值。称此两比值为**振幅比** $\gamma^{(1)}$，$\gamma^{(2)}$，且

$$\gamma^{(1)} = \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{a-\omega_1^2}{b} = \frac{e}{f-\omega_1^2}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{a-\omega_2^2}{b} = \frac{e}{f-\omega_2^2} \qquad (3-45)$$

式中 A 右上角标号(1)、(2) 分别表示对应于 ω_1、ω_2 的振幅。从上面的表达式可以看出，虽然振幅大小与初始条件有关，但是当系统按任一固有频率振动时，振幅比是确定的，与初始条件无关。系统中各点在同一瞬时位移的相对比值也是确定的。振幅比 γ 决定了整个系统的振动形态，对应于一个固有频率只有一个振动形态，并称此形态为**主振型**或**主模态**。对应于 ω_1 的主振型叫第一主振型，对应于 ω_2 的则叫第二主振型。因为主振型(有时简称**振型**) 和固有频率一样只取决于系统的物理性质，与初始条件无关，所以把固有频率及相应的主振型合称为**系统的固有特性**。

(4) 系统以某一阶固有频率按其主振型作振动，称为**系统的主振动**。第一阶主振动为

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

第二阶主振动为

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{bmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

可见，做主振动时，系统各质量点同时经过静平衡位置，同时到达最大偏离位置，以确定的频率与振型作简谐振动。

因为微分方程组(3-40) 的通解是两种主振动的叠加，所以该方程组的解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{bmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \end{bmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (3-46)$$

将振幅比引入(3-46) 式，可使其中一个振幅化为 1，以利于观察与比较主振型，这种处理方法称为**正规化措施**。经正规化后(3-46) 式变成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma^{(1)} & \gamma^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{bmatrix} \qquad (3-47)$$

上式也可写成

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \boldsymbol{\phi}^{(2)}] \begin{bmatrix} p^{(1)}(t) \\ p^{(2)}(t) \end{bmatrix} \qquad (3-48)$$

或

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{p} \qquad (3-49)$$

式中　$\boldsymbol{\phi}^{(1)}$，$\boldsymbol{\phi}^{(2)}$—— 模态向量或主振型，且

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} \\ \phi_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(2)} \\ \phi_2^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (3-50A)$$

$p^{(1)}(t), p^{(2)}(t)$—— 主坐标，且

$$p^{(1)}(t) = A_1^{(1)}\sin(\omega_1 t + \varphi_1), p^{(2)}(t) = A_1^{(2)}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$\boldsymbol{\Phi}$—— 模态矩阵，它是用各阶主振型按列排列而成，对本例有

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}^{(1)} \quad \boldsymbol{\phi}^{(2)}] \tag{3-50B}$$

$\boldsymbol{p}$—— 主坐标列阵，对本例有

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p^{(1)}(t) \\ p^{(2)}(t) \end{bmatrix}$$

(5) 若图 3-5 中 $m_1 = m, m_2 = 2m, K_1 = K_2 = K, K_3 = 2K$，则 $a = \frac{2K}{m}, b = \frac{K}{m}, e = \frac{K}{2m}$，$f = \frac{3K}{2m}$，代入(3-44)式得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{2.5\frac{K}{m}}$$

$$\gamma^{(1)} = 1 \quad \gamma^{(2)} = -\frac{1}{2}$$

由(3-50)式得

模态向量

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\phi}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

模态矩阵

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

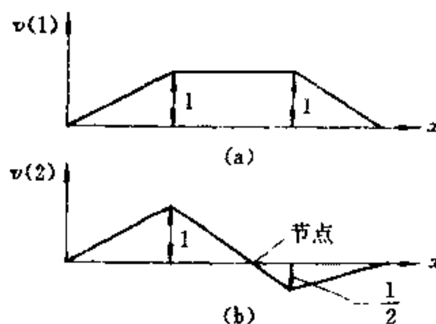


图 3-6

若以横坐标表示系统各点的静平衡位置，纵坐标表示各点的振幅比，则可作出主振型图(图 3-6)。图中(a)为第一阶主振型，(b)为第二阶主振型。在第二阶主振型中，在弹簧 K_2 所在区间有一在振动中始终不动的点，称为节点。

三、无阻尼自由振动

n 自由度系统无阻尼自由振动方程如(3-39)所示

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

若刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是正定的，引入柔度矩阵 $\boldsymbol{F}$，将上式左乘 $\boldsymbol{K}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{K}^{-1}$，则有

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{3-51}$$

式中

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}^{-1} \tag{3-52}$$

若将(3-39)式左乘 $\boldsymbol{M}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}$，则有

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{3-53}$$

令

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{F}\boldsymbol{M} = \tilde{\boldsymbol{A}} \tag{3-54}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\tilde{\boldsymbol{A}}$ 综合了系统的质量和刚度特性，所以都叫做动力矩阵。于是运动方程(3-53)、

(3－51) 变成

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{3－55}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{3－56}$$

它们都是二阶常系数线性齐次方程组。以上各式中 **0** 代表零矩阵。基于前面的讨论，(3－55)、(3－56) 的特解可写成如下形式

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\phi}e^{i(\omega t+\varphi)} \tag{3－57}$$

式中　$\boldsymbol{\phi}$—— 模态向量

$$i = \sqrt{-1}$$

令

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= \lambda \\ \frac{1}{\omega^2} &= \bar{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{3－58}$$

将(3－57)、(3－58) 代人(3－55)、(3－56)，经运算整理后可得主振型方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{I}\boldsymbol{\phi} \quad 或 \quad \boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} \tag{3－59}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\phi} = \bar{\lambda}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\phi} \tag{3－60}$$

于是有

$$[\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}]\boldsymbol{\phi} = 0 \quad 或 \quad [\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}]\boldsymbol{\phi} = 0 \tag{3－61}$$

$$[\widetilde{\boldsymbol{A}} - \bar{\lambda}\boldsymbol{I}]\boldsymbol{\phi} = 0 \tag{3－62}$$

方程(3－61)、(3－62) 有非零解的条件为

$$\Delta(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0 \quad 或 \quad |\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}| = 0 \tag{3－63}$$

$$|\widetilde{\boldsymbol{A}} - \bar{\lambda}\boldsymbol{I}| = 0 \tag{3－64}$$

方程(3－63)、(3－64) 是不同形式的系统的特征方程，也称**频率方程**。由线性代数知道，它们展开后是 λ 的 n 次代数方程，这是因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{I}$ 都是 n 阶方阵。我们把求得的 n 个根 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 称为**特征值**。通过特征值，利用(3－58) 式，即可得到 n 个固有频率。由此可见，n 自由度系统有 n 个固有频率。

因为我们讨论的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是正定的，刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是正定或半正定的，所以由正定与半正定条件，对于任何非零的 $\boldsymbol{\phi}$ 有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} &> 0 \\ \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi} &\geqslant 0 \end{aligned}\right. \tag{3－65}$$

现对主振型方程(3－59) 两边左乘以 $\boldsymbol{\phi}^T$ 得

$$\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi} = \lambda\boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} \tag{3－66}$$

考虑到条件式(3－65)，由上式可知，λ 一定是正数或零。我们把刚度矩阵是正定的系统叫**正定系统**，把刚度矩阵是半正定的系统叫**半正定系统**。因此，正定系统的特征值是正数，半正定系统的特征值是正数或零。

将各特征值代入主振型方程(3－59) 或(3－60)，就可以得到与各特征值对应的主振型(特征向量)，n 自由度系统有 n 个特征值和对应的 n 个特征向量。如果令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I} \tag{3－67}$$

那么系统的特征向量也可以从 $\boldsymbol{B}$ 矩阵的伴随矩阵 adj$\boldsymbol{B}$ 得出，由矩阵理论知

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}B$$

上式两边左乘以 $|B|B$ 可得

$$|B|I = B\text{adj}B$$

而当 $\lambda = \lambda_i$ 时，有 $B_i\text{adj}B_i = 0$

即

$$[A - \lambda I]\text{adj}B_j = 0$$

将上式与(3-61)式对比可知，$\text{adj}B_i$ 中各非零列与 $\phi^{(i)}$ 充其量只差一个常数乘子，这不会改变主振型。故将求出的特征值 λ_i 代入 B 矩阵(3-67)式，求 B 的伴随矩阵，取其任何一列非零列，就可以得到对应的特征向量 $\phi^{(i)}$(第 i 阶主振型)。

求出特征值与特征向量以后，代回(3-57)式就得到 n 组特解，将它们叠加起来就得到通解

$$q = \sum_{i=1}^{n}\phi^{(i)}e^{i(\omega_i t+\varphi_i)} \tag{3-68}$$

式中

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \qquad \phi^{(i)} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(i)} \\ \phi_2^{(i)} \\ \vdots \\ \phi_n^{(i)} \end{bmatrix} \tag{3-69}$$

对于同一振型 i，系统各质点的振幅 $\phi_1^{(i)},\phi_2^{(i)},\cdots,\phi_n^{(i)}$ 间具有确定的相对比值；因此，(3-68)式除了 n 个待定常数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 外，还有 n 个确定振幅值的待定常数，例如可取 $A_1^{(1)},A_1^{(2)},\cdots,A_1^{(n)}$。这样总共有 $2n$ 个待定常数，而初始条件正好也提供 $2n$ 个补充方程：

当 $t=0$ 时有

初位移 $\quad \phi_i(0) = \phi_{i0}$

初速度 $\quad \dot{\phi}_i(0) = \dot{\phi}_{i0} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$

所以，代入初始条件，自由振动有唯一解。

从(3-68)式可见，n 自由度系统有 n 个主振动，这些主振动都是谐振动，其通解是这 n 个主振动贡献的叠加。由于各阶固有频率不都相等，故振动合成的结果不再是简谐振动。

例3-2 图3-7为估算某机翼固有特性的模型。假设 $m_1 = m_2 = m$，弯曲刚度为 EJ，仅考虑与弯曲变形有关的微小位移，试求机翼弯曲振动的固有特性与模态矩阵。

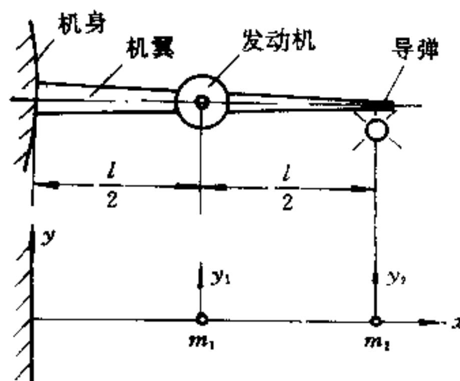


图 3-7

解 取 y_1、y_2 为广义坐标，它们以静平衡位置为起点，且向上为正。则

$$q = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

动能 $\quad T = \frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2) =$

$$\frac{1}{2}[\dot{y}_1 \quad \dot{y}_2]\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}$$

势能
$$U = \frac{1}{2}[y_1 \quad y_2]\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

将动能、势能表达式代人保守系统的拉格朗日方程，得运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由结构力学知系统的柔度矩阵

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EJ}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

则运动方程可改写成(3-56)式的形式，为此求动力矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{FM} = \frac{l^3}{48EJ}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EJ}\begin{bmatrix} 2m & 5m \\ 5m & 16m \end{bmatrix}$$

令 $\quad \alpha = l^3/48EJ$

由(3-64)式得特征方程

$$|\widetilde{\boldsymbol{A}} - \bar{\lambda}\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} 2m\alpha - \bar{\lambda} & 5m\alpha \\ 5m\alpha & 16m\alpha - \bar{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

展开上式得

$$\bar{\lambda}^2 - 18m\alpha\bar{\lambda} + 7m^2\alpha^2 = 0$$

则特征值为

$$\bar{\lambda}_{1,2} = (9 \pm 2\sqrt{18.5})l^3m/48EJ$$

第一阶固有圆频率

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\bar{\lambda}_1}} = \sqrt{\frac{48EJ}{(9+2\sqrt{18.5})l^3m}}$$

第二阶固有圆频率

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\bar{\lambda}_2}} = \sqrt{\frac{48EJ}{(9-2\sqrt{18.5})l^3m}}$$

将特征值 $\bar{\lambda}_1$ 代回(3-67)式得

$$B_1 = m\alpha\begin{bmatrix} -(7+2\sqrt{18.5} & 5 \\ 5 & 7-2\sqrt{18.5} \end{bmatrix}$$

伴随矩阵

$$\mathrm{adj}B_1 = m\alpha\begin{bmatrix} 7-2\sqrt{18.5} & -5 \\ -5 & -(7+2\sqrt{18.5}) \end{bmatrix}$$

则第一主振型

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{7+2\sqrt{18.5}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.320 \\ 1 \end{bmatrix}$$

将 λ_2 代回(3－67)式，求出 $\mathrm{adj}\boldsymbol{B}_2$，可得第二阶主振型

$$\phi^{(2)}=\begin{bmatrix}\dfrac{5}{7-2\sqrt{18.5}}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.120\\1\end{bmatrix}$$

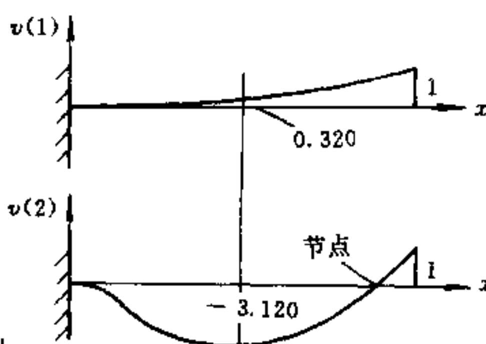


图 3－8

其主振型图如图 3－8 所示。模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 则为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}0.320 & -3.120\\1 & 1\end{bmatrix}$$

四、主振型的正交性

正交性是主振型的重要性质。我们正是利用这一性质来进行坐标变换，实现运动方程的解耦。

当系统以第 i 阶主振型进行主振动时，其主振型方程由(3－59)式知

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)} \tag{3-70}$$

而当系统以第 j 阶主振型进行主振动时则有

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\lambda_j\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)} \tag{3-71}$$

将(3－70)式前乘以 $\boldsymbol{\phi}^{(j)T}$

$$\boldsymbol{\phi}^{(j)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)} \tag{3-72}$$

将(3－71)式前乘以 $\boldsymbol{\phi}^{(i)T}$

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\lambda_j\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)} \tag{3-73}$$

由于我们所研究的 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{M}$ 都是对称矩阵，故有

$$\boldsymbol{K}^t=\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{M}^T=\boldsymbol{M}$$

将(3－72)式两边转置得

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=\lambda_i\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)} \tag{3-74}$$

将(3－74)与(3－73)相减得

$$(\lambda_i-\lambda_j)\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=0 \tag{3-75}$$

当 $i\neq j$ 时，则由(3－75)式可得

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=0\qquad(i\neq j) \tag{3-76}$$

将(3－76)式代回(3－74)式得

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(j)}=0\qquad(i\neq j) \tag{3-77}$$

由(3－76)、(3－77)式可以看出，主振型对于质量矩阵与刚度矩阵都是正交的。此二式表达的正交条件适用于任意两个不同的振型。

对(3－70)式两边前乘以 $\boldsymbol{\phi}^{(i)T}$

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)} \tag{3-78}$$

设质量矩阵与刚度矩阵是正定的，令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)}&=M_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)\\ \boldsymbol{\phi}^{(i)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(i)}&=K_i\qquad(i=1,2,\cdots,n)\end{aligned} \tag{3-79}$$

显然，M_i，K_i 都是正实数，称 M_i 为第 i 阶主质量或广义质量，K_i 为第 i 阶主刚度或广义刚度。(将

3－78）式两边除以 $\phi^{(i)T}M\phi^{(i)}$，可得

$$\lambda_i = \frac{\phi^{(i)T}K\phi^{(i)}}{\phi^{(i)T}M\phi^{(i)}} = \frac{K_i}{M_i} \tag{3-80}$$

即：第 i 阶特征值等于第 i 阶主刚度与第 i 阶主质量之比。

由于主振型的正交性，可以利用模态矩阵 Φ 来实现运动方程的解耦。

由（3－50B）式知

$$\Phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \cdots \quad \phi^{(n)}]$$

则

$$\Phi^T M \Phi = [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \cdots \quad \phi^{(n)}]^T M [\phi^{(1)} \quad \phi^{(2)} \quad \cdots \quad \phi^{(n)}] \tag{3-81}$$

根据主振型的正交性，当 $i \neq j$ 时

$$\phi^{(j)T}M\phi^{(i)} = 0 \qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

故（3－81）式乘积的矩阵中非对角线元素为零，于是有

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \phi^{(1)T}M\phi^{(1)} & & & 0 \\ & \phi^{(2)T}M\phi^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \phi^{(n)T}M\phi^{(n)} \end{bmatrix}$$

由主质量的定义，上式也可写成

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_n \end{bmatrix} = M_n \tag{3-82}$$

式中　M_n—— 主质量矩阵或称广义质量矩阵。

用同样的推导过程也可以获得

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} K_1 & & & 0 \\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_n \end{bmatrix} = K_n \tag{3-83}$$

式中　K_n—— 主刚度矩阵，或称广义刚度矩阵。

由于 M_n、K_n 是对角矩阵，利用模态矩阵 Φ 为坐标变换矩阵来进行坐标变换，即可实现运动方程的解耦。无阻尼自由振动的运动方程为

$$M\ddot{q} + Kq = 0$$

现做如下坐标变换：由（3－49）式有

$$q = \Phi p$$

式中 p 为经过 Φ 变换后的新坐标系。将上式代入运动方程得

$$M\Phi\ddot{p} + K\Phi p = 0$$

将上式前乘以 Φ^T

$$\Phi^T M \Phi \ddot{p} + \Phi^T K \Phi p = 0$$

由（3－82）、（3－83）式可将上式改写成

$$M_n\ddot{p} + K_n p = 0 \quad 或 \quad M_i\ddot{p}_i + K_i p_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3-84}$$

(3-84)式表明，运动方程已由原来的广义坐标 q 转换成新坐标系 p。显然 p 即为主坐标。此时，原来耦合形式的振动方程已经解耦，变成(3-84)所示的 n 个独立的运动方程。我们把这种坐标变换叫做**主坐标变换**。同理，可对多自由度无阻尼强迫振动方程解耦。

五、正规化与正规坐标

为了便于进行振型比较，前面介绍了一种对振型进行正规化的方法。此法选定某一个质量点处的振幅为1，从而确定其他质量点处的幅值，组成振型并构成模态矩阵。这叫做关于特定坐标的振型正规化。也有取每一个振型中的最大振幅为基准值，而不取特定坐标值为基准的。这样，在每一振型中的最大值为1，这就为计算工作提供了方便。然而在进行结构动力分析时，最常用的正规化方法是将模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 变成正规化模态矩阵 μ。用 μ 作为变换矩阵进行坐标变换时，将使 $\boldsymbol{M}$ 矩阵变为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，这种正规化使分析工作更简便。

这种正规化的基本过程是先求出各阶主振型，并按(3-79)式计算出各阶振型的主质量 M_i，再对每一主振型进行如下变换：

$$\mu^{(i)} = \phi^{(i)}/C_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3-85}$$

式中 $\mu^{(i)}$——第 i 阶正规化振型，$C_i = \sqrt{M_i}$。

由各阶正规化振型按下式构成正规化模态矩阵

$$\mu = [\mu^{(1)} \quad \mu^{(2)} \quad \cdots \quad \mu^{(n)}] \tag{3-86}$$

不难证明

$$\mu^T M \mu = I \tag{3-87}$$

$$\mu^T K \mu = \Lambda \tag{3-88}$$

式中 I——单位矩阵；

Λ——系统的特征值矩阵；它是以特征值 λ 为对角线元素的对角阵，即

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

用正规化模态矩阵也可对运动方程进行解耦。这时可进行下述变换：

令
$$q = \mu\eta \tag{3-89}$$

将(3-89)式代入运动方程(3-39)，并前乘以 μ^T 可得

$$\mu^T M \mu \ddot{\eta} + \mu^T K \mu \eta = 0$$

考虑到(3-87)、(3-88)式，则上式变成

$$\ddot{\eta} + \Lambda\, \eta = 0$$

或
$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3-90}$$

显然，上述变换不但使运动方程解耦，而且使广义质量为1。(3-89)式所表示的坐标变换称作**正规坐标变换**。η 称为**正规坐标向量**。这种使运动方程解耦的方法叫做**模态分析法**。根据单自由度理论，在正规坐标下，第 i 阶振型的无阻尼自由振动响应为

$$\eta_i = \eta_{0i}\cos\omega_i t + \frac{\dot{\eta}_{0i}}{\omega_i}\sin\omega_i t \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3-91}$$

式中　η_{0i}—— 正规坐标下的初始位移；

　　　$\dot{\eta}_{0i}$—— 正规坐标下的初始速度。

求出 η_i 后，构成正规坐标向量 $\boldsymbol{\eta}$，代入(3－89)式，即可得到原物理坐标下的响应。即

$$\boldsymbol{q} = \mu^{(1)}\eta_1 + \mu^{(2)}\eta_2 + \cdots + \mu^{(n)}\eta_n \tag{3-92}$$

由(3－92)式可知，通过正规坐标或主坐标变换，使原来的运动方程解耦，分别求解每一正规坐标或主坐标下的响应，然后按(3－92)式叠加，即可得出原始坐标所表示的响应。这种方法叫做**振型叠加法**，或称**模态叠加法**。

例 3－3　对图 3-9 所示对称的二自由度系统进行正规坐标变换。

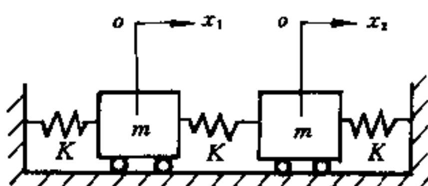


图　3－9

解　取 x_1、x_2 为广义坐标，系统的运动方程为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{a}$$

特征值与特征向量为

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{K}{m}, \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = 3\frac{K}{m}$$

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\phi}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{b}$$

而主质量

$$M_1 = \boldsymbol{\phi}^{(1)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2m$$

$$M_2 = \boldsymbol{\phi}^{(2)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2m$$

则模态矩阵

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

正规化振型

$$C_1 = C_2 = \sqrt{2m}$$

$$\mu^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mu^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

正规化模态矩阵

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \tag{c}$$

将(c)式代入(a)式并前乘以 u^T 得

可见，通过方程(c)的正规坐标变换，得到解耦形式的、质量矩阵为单位矩阵的运动方程(d)。

§3.4 半正定系统

图 3-10 所示为一些半正定系统。自由飞行中的飞行器、在发射架上滑行的导弹和运动着的轮轴系统都存在着刚体运动。在求解这种系统的频率方程时，会发现该方程有零根存在(即有零频率)。而且，系统刚度矩阵是半正定的，称此系统为**半正定系统**。显然半正定系统的势能函数是广义坐标 q 的半正定二次函数。现以图 3-10 中的双盘轴扭转振动系统为例来说明。取圆盘的扭转角 θ_1、θ_2 为广义坐标。即 $q_1=\theta_1$、$q_2=\theta_2$，则系统动能 T 与势能 U 的表达式为

$$T=\frac{1}{2}(I_1\dot{\theta}_1^2+I_2\dot{\theta}_2^2)$$

$$U=\frac{1}{2}K_\theta(\theta_2-\theta_1)^2$$

式中　I_1,I_2 —— 圆盘绕 x 轴的转动惯量；

　　　K_θ —— 轴段的扭转刚度。

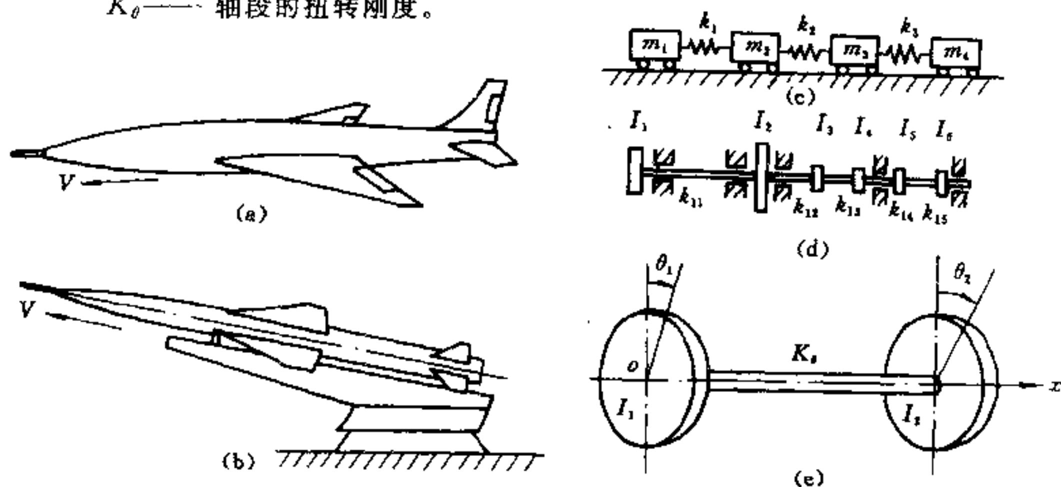


图　3-10

由拉格朗日方程可得系统的运动方程

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} K_\theta & -K_\theta \\ -K_\theta & K_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这与(3-40)式为同一形式。由(3-43)式得频率方程

$$\Delta(\omega)=\begin{vmatrix} K_\theta-\omega^2 I_1 & -K_\theta \\ -K_\theta & K_\theta-\omega^2 I_2 \end{vmatrix}=0$$

展开上式得系统的特征值：

$$\omega^2=0 \text{ 与 } \omega^2=\frac{K_\theta(I_1+I_2)}{I_1 I_2}$$

考虑到(3-45)式，可得 $\omega = 0$ 的振幅比 γ 为

$$\gamma = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{K_\theta}{K_\theta - \omega^2 I_1} = \frac{K_\theta - \omega^2 I_2}{K_\theta} = 1$$

故对应于零频率的特征向量(零模态的模态向量)为：

$$\phi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

这表明，两个圆盘以同样的角位移转动，圆盘间无相对位移，轴不受力，系统作刚体转动。

从上面简单的例子可以看出，零模态下平移运动要求主广义坐标满足 $q_1 = q_2 = \cdots = q_r$，故 $\phi^{(0)}$ 必须含有等值元素。利用主振型(模态向量)的正交性，即可将半正定系统的零模态向量清除掉，使系统成为正定系统。这是处理复杂的半正定系统的方法之一。

由(3-76)式的正交关系有：

$$\boldsymbol{\phi}^{(0)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(i)} = 0 \qquad (i \neq 0)。$$

若通过坐标变换使 $\boldsymbol{M}$ 矩阵成为对角矩阵，并用 $\begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \boldsymbol{M} & \\ & & \diagdown \end{bmatrix}$ 表示，则上式可得出

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \boldsymbol{M} & \\ & & \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ii} q_i = 0 \tag{3-93}$$

(3-93)式就是可将零模态清除掉的约束方程。此式表明了能发生平移刚体运动的半正定系统广义坐标间必须满足的特定关系式。每一个这样的关系式就代表：一个坐标可用其他坐标来表达，从而清除一个坐标。因此，它是利用零模态性质提供的广义坐标之间的约束关系，用这样的约束方程来减少独立坐标数目，使半正定系统转变成正定系统。这就是所谓"缩减系统坐标"的方法。

例 3-4 图 3-11 所示的模型，为估算导弹轴向振动固有特性的一种简单分析模型。

设 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$，$k_1 = k_2 = k_3 = k$，求系统的固有特性。

解 显然，整个系统可以轴向刚体运动，是半正定系统。用缩减坐标的方法取 $\boldsymbol{q} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$ 为广义坐标，各元素均以静平衡位置为坐标原点。

由静力学知刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

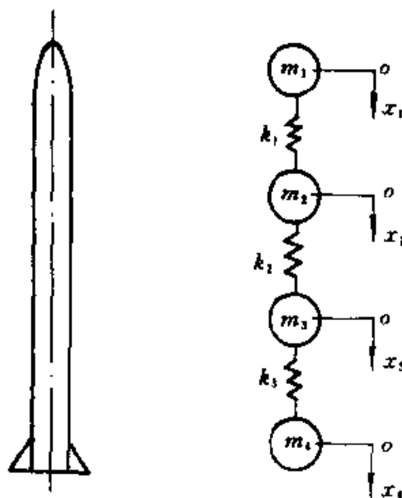


图 3-11

质量矩阵

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

由(3-93)式得

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0$$

代入已知数据得约束方程

$$x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$$

显然引入上式后，独立坐标数降为3，这样可有矩阵式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

令

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad q^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

称 β 为约束矩阵，q^* 为引入约束方程后的广义坐标向量。

动能

$$T = \frac{1}{2}[\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\dot{q}^{*T}\beta^T M \beta \dot{q}^* = \frac{1}{2}\dot{q}^{*T} M^* \dot{q}^*$$

式中 $$M^* = \beta^T M \beta = m \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

势能 $$U = \frac{1}{2} q^{*T} \beta^T K \beta q^* = \frac{1}{2} q^{*T} K^* q^*$$

式中 $$K^* = \beta^T K \beta = k \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

于是 $$K^{*-1} = F^* = \frac{1}{8k} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

动力阵 $$\widetilde{A}^* = F^* M^* = \frac{m}{4k} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

则新系统的频率方程为

$$|\tilde{A}^* - \bar{\lambda}I| = \begin{vmatrix} \frac{3m}{2k} - \bar{\lambda} & \frac{3m}{4k} & \frac{m}{4k} \\ \frac{m}{2k} & \frac{3m}{4k} - \bar{\lambda} & \frac{m}{4k} \\ -\frac{m}{2k} & -\frac{m}{4k} & \frac{m}{4k} - \bar{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

展开后解得

$$\bar{\lambda} = 1.707\ 1\,\frac{m}{k},\ \bar{\lambda}_2 = 0.500\ 0\,\frac{m}{k},\ \bar{\lambda}_3 = 0.292\ 9\,\frac{m}{k}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\bar{\lambda}_1}} = 0.765\ 4\sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = 1.414\ 2\sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_3 = 1.847\ 1\sqrt{\frac{k}{m}}$$

振型

$$\phi^{*(1)} = \begin{bmatrix} -2.414\ 2 \\ -1.000\ 0 \\ 1.000\ 0 \end{bmatrix},\ \phi^{*(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \phi^{*(3)} = \begin{bmatrix} 0.414\ 2 \\ -1.000\ 0 \\ 1.000\ 0 \end{bmatrix}$$

因为

$$q = \beta q^*$$

故最后得

$$\phi^{(1)} = \beta\phi^{*(1)} = \begin{bmatrix} -2.414\ 2 \\ -1.000\ 0 \\ 1.000\ 0 \\ 2.414\ 2 \end{bmatrix},\ \phi^{(2)} = \beta\phi^{*(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\phi^{(3)} = \beta\phi^{*(3)} = \begin{bmatrix} 0.414\ 2 \\ -1.000\ 0 \\ 1.000\ 0 \\ -0.414\ 2 \end{bmatrix}$$

而刚体运动振型 $\phi^{(0)}$ 模态矩阵为 Φ

$$\phi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & -2.414\ 2 & -1 & 0.414\ 2 \\ 1 & -1.000\ 0 & 1 & -1.000\ 0 \\ 1 & 1.000\ 0 & 1 & 1.000\ 0 \\ 1 & 2.414\ 2 & -1 & -0.414\ 2 \end{bmatrix}$$

此外，还可以用移频法求半正定系统的固有特性。这种方法的基本原理如下：由(3-59)式有

$$K\phi = \lambda M\phi$$

对半正定系统，刚度矩阵 K 是半正定的，无逆矩阵，得不到柔度矩阵与动力矩阵，但如果将上面的主振型方程改成下面形式

$$[K + \alpha M]\phi = (\lambda + \alpha)M\phi \qquad (3-94)$$

式中 α 为任意正数，一般取值可比系统估计的最低固有频率的平方略小一些。

由于 M 是正定的，故 $K + \alpha M$ 也是正定的。令 $K^* = K - \alpha M$，$\lambda^* = \lambda + \alpha$，则(3-94)式成

为

$$\boldsymbol{K}^{*}\boldsymbol{\phi}=\lambda^{*}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} \tag{3-95}$$

显然，(3－95)式所代表的新系统特征值与原问题特征值相差 α。此新系统变成正定系统。求出 $\boldsymbol{K}^{*}$、$\boldsymbol{\phi}$、λ^{*}，即可算得原系统的特征值与特征向量。

在系统有刚体运动时($\omega_i=0$)，其运动方程由(3－90)式知为：$\ddot{\eta}_i=0$

将运动方程积分，得正规坐标下刚体运动响应式

$$\eta_i=\eta_{0i}+\dot{\eta}_{0i}t \tag{3-96}$$

§3.5 瑞雷-李兹法

瑞雷-李兹法是建立在能量法基础上的用于计算固有频率的一种近似解法。

从§3.3知道，当无阻尼的多自由度线性系统以某一特定的固有圆频率 ω_r 作主振动时，系统的各点在平衡位置附近以 ω_r 作简谐振动，此时相应的广义坐标列阵 $\boldsymbol{q}^{(r)}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{q}^{(r)}=\boldsymbol{\phi}^{(r)}A_1^{(r)}\sin(\omega_r t+\varphi_r)$$

则广义速度列阵为

$$\dot{\boldsymbol{q}}^{(r)}=\omega_r\boldsymbol{\phi}^{(r)}A_1^{(r)}\cos(\omega_r t+\varphi_r)$$

由动能与势能表达式(3－10)与(3－19)可知，此情况下最大动能 $T_{\max}$ 与最大势能 $U_{\max}$ 可写成

$$T_{\max}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_{\max}^{(r)T}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}_{\max}^{(r)}=\frac{1}{2}\omega_r^2A_1^{(r)2}\boldsymbol{\phi}^{(r)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(r)}$$

$$U_{\max}=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\max}^{(r)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_{\max}^{(r)}=\frac{1}{2}A_1^{(r)2}\boldsymbol{\phi}^{(r)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(r)}$$

系统作主振动时是保守系统，由机械能守恒定律并参照(3－13)式知 $T_{\max}=U_{\max}$；将 $T_{\max}$、$U_{\max}$ 的表达式代入后可导出

$$\omega_r^2=\frac{\boldsymbol{\phi}^{(r)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}^{(r)}}{\boldsymbol{\phi}^{(r)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{(r)}} \tag{3-97}$$

上式就是(3－80)式。它表明，只要能得到第 r 阶主振型 $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$，代入(3－97)式，即可求出该振型对应的固有圆频率 ω_r。但事先不知道 $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$。为了计算 ω_r，可假设一个很接近于 $\boldsymbol{\phi}^{(r)}$ 的振型 ψ，代入(3－97)式得

$$R(\psi)=\frac{\psi^T\boldsymbol{K}\psi}{\psi^T\boldsymbol{K}\psi} \tag{3-98}$$

式中 $R(\psi)$ 称瑞雷商。比较一下(3－97)式与(3－98)式可知，此时(3－98)式可计算出 ω_r 近似值。可以证明，假设振型 ψ 逼近系统的第 r 阶振型过程，即瑞雷商取极小值过程，此极限值即为系统的 ω_r^2。为此，将 ψ 用一组正规振型 $\mu^{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合来表示，即

$$\psi=C_1\mu^{(1)}+C_2\mu^{(2)}+\cdots+C_n\mu^{(n)}$$

根据正规振型的性质，考虑到(3－87)、(3－88)式可得

$$\psi^T\boldsymbol{M}\psi=C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2$$

$$\psi^T\boldsymbol{K}\psi=C_1^2\omega_1^2+C_2^2\omega_2^2+\cdots+C_n^2\omega_n^2$$

代入(3－98)式，则瑞雷商可写成所有 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的加权平均，加权因子是 $C_i^2(i=1,2,$

$\cdots,n)$，故

$$R(\psi)=\frac{\sum_{i=1}^{n}C_i^2\omega_i^2}{\sum_{i=1}^{n}C_i^2} \tag{3-99}$$

从上式看，若 ψ 很接近第 r 阶振型，则有 $C_r > C_i, C_i/C_r < 1, \left(\frac{C_i}{C_r}\right)^2 = \varepsilon^2 \ll 1$（$\varepsilon$ 是微量，$i = 1,2,\cdots,n$）。$i \neq r, R(\psi) \approx \omega_r^2$。现以 ψ 很接近第一振型而言，以 C_1^2 除(3－99)式的分子分母，得

$$R(\psi)=\frac{\omega_1^2+\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i^2\omega_i^2}{1+\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i^2}=\omega_1^2[1+O(\varepsilon^2)] \tag{3-100}$$

式中 $O(\varepsilon^2)$ 是 ε 的二阶表达式。

可见，(3－100)式右边括号内大于 1，且接近于 1，于是有

$$R(\psi) > \omega_1^2 \quad 且 \quad R(\psi) \approx \omega_1^2$$

同理，当 ψ 很接近于 $\phi^{(r)}$ 时，则 $R(\psi) \approx \omega_r^2$。

由(3－100)可见，瑞雷商的极小值等于 ω_1^2。但是，如果所取的 ψ 正好与第一振型 $\mu^{(1)}$ 正交，则 $\mu^{(1)T}\psi = 0$，故有 $C_1 = 0$。用同样的原理可导出瑞雷商的极小值此时等于 ω_2^2。依次类推，当 ψ 与前$(r-1)$个固有振型正交时，瑞雷商的极小值则等于 ω_r^2，即

$$\omega_r^2 = R(\psi)_{\min}$$

瑞雷商的这种极值性质，从物理意义上可以这样理解：若选取的振型 ψ 与系统固有振型不完全相同，就相当于给系统施加某种附加的约束，使系统刚度增加，导致计算出的固有频率高于系统固有频率。

原则上，用瑞雷法可以计算系统各阶固有频率，但由于高阶振型不容易选择准确，而第一振型的近似振型比较容易选取（例如采用系统的静挠度曲线），因此，一般只用瑞雷法求系统的第一阶固有频率。为了求高阶的固有频率，引伸出了瑞雷-李兹法，或称李兹法，这是一种缩减系统自由度的近似解法。它是用有限个独立矢量 $\phi_1,\phi_2\cdots\phi_s$ 的线性组合来表示 n 自由度系统的假设振型$(n > s)$，于是有

$$\psi=\phi\alpha=[\phi_1 \quad \phi_2\cdots\phi_s]\begin{bmatrix}a_2\\a_2\\\vdots\\a_s\end{bmatrix} \tag{3-101}$$

式中　ϕ —— 变换矩阵，$n \times s$ 阶，是假设的形状矢量集合；

　　　α —— 待定系数列阵，是新系统的 s 个广义坐标，其分量 $a_1,a_2\cdots a_3$ 为待定系数，可由瑞雷商的极值性质决定，为 $s \times 1$ 阶。

将(3－101)式代入瑞雷商表达式(3－98)

$$R(\alpha)=\frac{\alpha^T\phi^T\boldsymbol{K}\phi\alpha}{\alpha^T\phi^T\boldsymbol{M}\phi\alpha}=\frac{\alpha^T\boldsymbol{K}_R\alpha}{\alpha\boldsymbol{M}_R\alpha}=\frac{N_R(\alpha)}{D_R(\alpha)} \tag{3-102}$$

式中　$\boldsymbol{K}_R = \phi^T\boldsymbol{K}\phi$ 称为广义刚度；

　　　$\boldsymbol{M}_R = \phi^T\boldsymbol{M}\phi$ 称为广义质量。

(3-102) 式已使瑞雷商以 α 作为参变量。若 ω^2 是 $R(\alpha)$ 的极小值，则有

$$\omega^2 = \left(\frac{N_R}{D_R}\right)_{\min} \tag{3-103}$$

利用瑞雷商的极值性质，可把问题归结为求关于 α 的 $R(\alpha)$ 的极小值以确定 α。令

$$\frac{\partial R(\alpha)}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,s)$$

将(3-102) 式代入上式，考虑到(3-103) 式得

$$\frac{\partial R(\alpha)}{\partial a_i} = \frac{1}{D_R^2}\left(D_R \frac{\partial N_R}{\partial a_i} - N_R \frac{\partial D_R}{\partial a_i}\right) = 0$$

且

$$\frac{\partial N_R}{\partial a_i} - \omega^2 \frac{\partial D_R}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,s) \tag{3-104}$$

根据(3-102) 式给定的关于 N_R、D_R 的定义，有

$$\frac{\partial N_R}{\partial a_i} = 2\alpha^T\phi^T\boldsymbol{K}\phi\frac{\partial \alpha}{\partial a_i} = 2\alpha^T\phi^T\boldsymbol{K}\phi_i$$

$$\frac{\partial D_R}{\partial a_i} = 2\alpha^T\phi^T\boldsymbol{M}\phi_i \qquad (i = 1,2,\cdots,s) \tag{3-105}$$

将(3-105) 式并代入(3-104) 式转置，则有

$$\phi_i^T\boldsymbol{K}\phi\alpha - \omega^2\phi_i^T\boldsymbol{M}\phi\alpha = \boldsymbol{0} \qquad (i = 1,2,\cdots,s)$$

将上面的方程组合并写成矩阵方程

$\Phi^T\boldsymbol{K}\Phi\alpha - \omega^2\Phi^T\boldsymbol{M}\Phi\alpha = \boldsymbol{0}$ 引入广义刚度 $\boldsymbol{K}_R$ 与广义质量 $\boldsymbol{M}_R$，则得

$$(\boldsymbol{K}_R - \omega^2\boldsymbol{M}_R)\alpha = \boldsymbol{0} \tag{3-106}$$

这是以 α 为未知数的 s 元齐次方程组。由非零解条件得到频率方程式

$$|\boldsymbol{K}_R - \omega^2\boldsymbol{M}_R| = \boldsymbol{0} \tag{3-107}$$

将(3-107) 式与(3-63) 式比较可知，瑞雷-李兹法把 n 自由度的系统缩减成用 s 个广义坐标及相应假设形状表示的 s 个自由度的系统。频率方程(3-107) 可用各种标准特征方程解法来求解。因 s 一般远小于 n，故求解工作量大为减小。在解出的 s 个固有频率近似值中，一般最前面的若干个频率准确度较高。若需求 r 个固有频率，通常取 $s = 2r$。

同瑞雷法一样，用李兹法求得的固有频率近似值总是比精确值偏高。这是因为，用李兹法相当于给系统施加了 $(n - s)$ 个约束。另外，也可以采用柔度矩阵表示的瑞雷商，用同样原理进行推导，这时 $\boldsymbol{K}_R$、$\boldsymbol{M}_R$ 和频率方程将有不同的形式。

例 3-5 图 3-12 表示由四个相等质量 m 及四个刚度为 k 的弹簧组成的串联系统，用李兹法求系统的前两阶固有频率与振型。

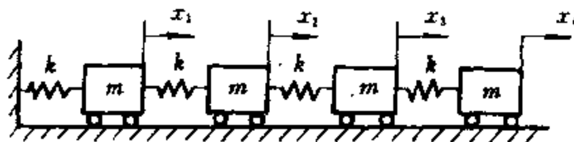


图 3-12

解　容易求得系统的质量阵 $\boldsymbol{M}$ 为：$\boldsymbol{M} = m\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。而系统的刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

取变换矩阵

$$\boldsymbol{\phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则由（3-101）式知假设振型

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2]\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

广义质量

$$\boldsymbol{M}_R = \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi} = m\begin{bmatrix} 1.875 & 1.55 \\ 1.55 & 1.4 \end{bmatrix}$$

广义刚度

$$\boldsymbol{K}_R = \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi} = k\begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.36 \end{bmatrix}$$

由（3-107）式得频率方程

$$\begin{vmatrix} 0.25k - 1.875\omega^2 m & 0.25k - 1.55\omega^2 m \\ 0.25k - 1.55\omega^2 m & 0.36k - 1.4\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

解此频率方程可得

$$\omega_1^2 = 0.123\,59\,\frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = 1\,\frac{k}{m}$$

将此结果代入（3-106）式可得

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_1 = -3.198\,7 \qquad \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_2 = -0.8$$

将 $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$ 代入假设振型表达式，可得正规化振型

$$\boldsymbol{\psi}_1 = [0.363\,70 \quad 0.636\,44 \quad 0.818\,221]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\psi}_2 = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

则此系统前两阶固有频率的准确值为

$$\omega_1^2 = 0.120\,61\,\frac{k}{m} \qquad \text{（准确到第 5 位数字）}$$

$$\omega_2^2 = 1\,\frac{k}{m}$$

显而易见，用李兹法进行坐标缩减是一个很有用的概念。它是对多自由度系统固有特性进行工程计算的有效方法之一。应用这一方法，也可以将连续系统的假设振型 ψ 简化为有限个满足位移端点条件的独立的振型函数 $\phi(x)$ 的线性组合。即

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i\phi_i(x)$$

式中 A_i 是待定参数。通过计算连续系统瑞雷商的极小值可确定 A_i，使假设振型与固有振型相拟合；从而将求连续函数 $\psi(x)$ 的问题转化为求 n 个待定参数 A_i 的问题，将无穷多自由度的系统转化为 n 个自由度的离散系统来处理。

§3.6 系统对初始条件的响应

计算此种响应的基本思想是，在求得系统的固有特性后，先将(3-59)式表达的耦合形式的无阻尼自由振动方程，利用正规坐标变换或主坐标变换，改写成(3-90)式或(3-84)式所表达的去耦形式的 n 个独立运动方程，再将初始条件也进行正规坐标或主坐标变换，得到新坐标系的 $2n$ 个初始条件表达式。此时，从(3-91)、(3-96)式可以看到，系统的初始条件响应也只有 $2n$ 个未知数，故利用初始条件完全可以确定它们。现以正规坐标形式来说明。

对于正定系统，自由振动解由 n 组主振动叠加而成，即

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\mu}^{(1)}\eta_1 + \boldsymbol{\mu}^{(2)}\eta_2 + \cdots + \boldsymbol{\mu}^{(i)}\eta_i + \cdots + \boldsymbol{\mu}^{(n)}\eta_n$$

而正规坐标 η_i 由(3-91)式知

$$\eta_i = \eta_{0i}\cos\omega_i t + \frac{\dot{\eta}_{0i}}{\omega_i}\sin\omega_i t \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

对于半正定系统，这 n 组主振动中有一个或几个固有频率为零，它们相应的一个或几个主振动就呈(3-96)式的形式，即

$$\eta_i = \eta_{0i} + \dot{\eta}_{0i}t$$

故确定初始条件响应有 $2n$ 个未知数 η_{0i} 与 $\dot{\eta}_{0i}(i = 1,2,\cdots,n)$，而初始条件也有 $2n$ 个。当 $t = 0$ 时有

$$q_i(0) = q_{0i},\ \dot{q}_i(0) = \dot{q}_{0i},\ (i = 1,2,\cdots,n)$$

因为

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\eta}$$

故在正规坐标下初始条件的表达式为

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\mu}^{-1}\boldsymbol{q}_0,\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \boldsymbol{\mu}^{-1}\dot{\boldsymbol{q}}_0 \tag{3-108}$$

这样，正规坐标向量 η 就可以确定；再利用(3-92)式，可得到初始条件引起的原始坐标下的响应。

例 3-6 图 3-13 所示为一简化的飞机模型。M 为机身部分等效质量，m 为机翼部分的等效质量，由均匀的无质量梁连接，求该系统在铅垂平面内做横向弯曲振动时的固有特性和对初始条件 $\boldsymbol{q}(0) = [0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\boldsymbol{q}}(0) = [v\quad 0\quad v]^{\mathrm{T}}$ 的自由振动响应。设：$m = M$，$l_1 = l_2 = l$，梁的弯曲刚度为 EJ，不考虑阻尼。

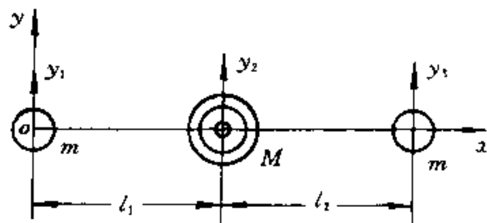


图 3-13

解 取横向位移 y_1, y_2, y_3 为自静平衡位置起算的广义坐标。由结构力学知系统的刚度矩阵与质量矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2}\\ -3 & 6 & -3\\ \frac{3}{2} & -3 & \frac{3}{2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}$$

由方程(3-63)知频率方程为

$$\begin{vmatrix}\frac{3EJ}{2l^3}-\lambda m & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{2l^3}\\ -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^3}-\lambda m & -\frac{3EJ}{l^3}\\ \frac{3EJ}{2l} & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{2l^3}-\lambda m\end{vmatrix}=0$$

展开上式解得特征值

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=0,\quad \lambda_3=\frac{9EJ}{ml^3}$$

将 λ_1、λ_2、λ_3 代入主振型方程(3-61),令 $\phi_1^{(i)}=1$,可得特征向量

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\phi}^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{\phi}^{(3)}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

可见 $\phi^{(1)}$ 为刚体旋转,$\phi^{(2)}$ 为刚体平移。

则模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 与固有频率为

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad \omega_1=\omega_2=0\quad \omega_3=\sqrt{\frac{9EJ}{ml^3}}$$

而 $C_1=\sqrt{2m}\quad C_2=\sqrt{3m}\quad C_3=\sqrt{6m}$

即正规化模态矩阵根据(3-85)式可写成

$$\mu=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{-2}{\sqrt{6m}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{3m}} & \frac{1}{\sqrt{6m}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

由(3-87)式可得

$$\mu^{-1}=\mu^T\boldsymbol{M}=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}=$$

$$\sqrt{m}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \tag{3-109}$$

由初始条件,利用(3-108)式得正规坐标下的初始条件

$$\eta_0=\mu^{-1}q_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \dot{\eta}_0=\mu^{-1}\dot{q}_0=\sqrt{m}\begin{bmatrix}0\\ \frac{2v}{\sqrt{3}}\\ \frac{2v}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

应用(3-96)、(3-91)式得

$$\eta_1=0\quad \eta_2=\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{3}}vt\quad \eta_3=\frac{2v\sqrt{m}}{\omega_3\sqrt{6}}\sin\omega_3 t$$

由(3-92)式可得原坐标系表示的响应

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\sqrt{m}\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{\sqrt{3}}vt\\ \frac{2}{\omega_3\sqrt{6}}v\sin\omega_3 t\end{bmatrix}=\frac{v}{3}\begin{bmatrix}2t+\frac{1}{\omega_3}\sin\omega_3 t\\ 2t-\frac{2}{\omega_3}\sin\omega_3 t\\ 2t+\frac{1}{\omega_3}\sin\omega_3 t\end{bmatrix}$$

§3.7 多自由度系统的阻尼

本章前面讨论的问题都是无阻尼振动情况,无论是进行主坐标变换还是正规坐标变换,都没有考虑阻尼。而在实际工程中,对于弹性结构的多自由度振动响应问题,往往不能忽略阻尼的作用,特别是当激励频率接近于系统固有频率时,阻尼更显得重要。但是,由于各种阻尼力的机理比较复杂,工程上常常将各种阻尼力简化成与速度成正比的粘性阻尼力,阻尼系数 c 则由各种理论与经验公式算出,或直接用实验测定。此时,带粘性阻尼的多自由度系统的自由振动微分方程如(3-37)所示

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{3-37}$$

式中阻尼矩阵的形式一般为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn}\end{bmatrix} \tag{3-110}$$

而且为对称的正定矩阵。系统引入阻尼矩阵使动态分析更加复杂。如果对(3-37)式进行正规坐标变换,则可得

$$I\ddot{\eta} + C_N\dot{\eta} + \Lambda\eta = 0 \tag{3-111}$$

式中　C_N—— 正规坐标下的阻尼矩阵

且
$$C_N = \mu^T C \mu \tag{3-112}$$

一般说来，C_N 不是对角矩阵，故(3-111)式是一组速度项互相耦合的运动方程。这就是阻尼耦合现象。下面介绍使阻尼耦合解耦的方法。

1. 比例阻尼

与质量矩阵或刚度矩阵(或二者的线性组合)成正比的阻尼称为**比例阻尼**，也称**线性阻尼**。其表达式为

$$C = a_0 M + a_1 K \tag{3-113}$$

式中 a_0，a_1 为比例常数。将(3-113)式代入(3-112)式得

$$C_N = a_0 I + a_1 \Lambda$$

将上式代入(3-111)式得

$$\ddot{\eta} + [a_0 I + a_1 \Lambda]\dot{\eta} + \Lambda\eta = 0 \tag{3-114}$$

或

$$\ddot{\eta}_i + (a_0 + a_1\omega_i^2)\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

显然，(3-114)式已使原方程解耦，可作为一组单自由度系统来处理。系统的响应则是这些单自由度系统所给出的响应的叠加。

2. 振型阻尼(模态阻尼)

使正规坐标的阻尼矩阵对角线化的最简单方法是将 C_N 的非对角线元素近似地视为零。于是有

$$C_N \approx C_N^* = \begin{bmatrix} \mu^{(1)T}C\mu^{(1)} & & & 0 \\ & \mu^{(2)T}C\mu^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu^{(n)T}C\mu^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{N11} & & & 0 \\ & C_{N22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_{Nnn} \end{bmatrix} \tag{3-115}$$

式中　C_N^* —— 正规振型阻尼矩阵；

　　　C_{Nnn} —— 第 n 阶正规振型的阻尼系数。

在阻尼比较小而且系统各阶固有频率彼此不相等又不很接近时，这样处理 C_N 在动态分析中通常能得到关于系统运动规律的很好的近似解。显然，用 C_N^* 代替 C_N 代入(3-111)式，即可使之解耦。为了使解耦后的运动方程类似于单自由度系统的运动方程，特引入符号 ζ_i。因为规定第 i 阶振型的阻尼系数 C_{Nii} 为

$$C_{Nii} = \mu^{(i)T}C\mu^{(i)} = 2\zeta_i\omega_i \tag{3-116}$$

故

$$C_N^* = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & & 0 \\ & 2\zeta_2\omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\zeta_n\omega_n \end{bmatrix} \tag{3-117}$$

(3-111)式可改写为

$$\ddot{\eta}_i + 2\zeta_i\omega_i\dot{\eta}_i + \omega_i^2\eta_i = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3-118}$$

$$\zeta_i = C_{N,i}/2\omega_i \tag{3-119}$$

式中ζ_i为第i阶正规坐标振型阻尼比。对于弱阻尼系统，一般假定$0 \leqslant \zeta_i < 0.20$。在实际动态分析时，通常用实测或参考已有资料假定的办法来给出各阶振型的ζ_i。能用此法处理的阻尼称为**振型阻尼**。

如果需要原始坐标表示的阻尼矩阵$\boldsymbol{C}$，可利用(3-112)式得到

$$\boldsymbol{C} = [\mu^T]^{-1}\boldsymbol{C}_N\mu^{-1} \approx [\mu^T]^{-1}\boldsymbol{C}_N^*\mu^{-1}$$

但矩阵求逆工作量大，现做如下改造：

根据(3-109)式知

$$\mu^{-1} = \mu^T\boldsymbol{M}$$

则有

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}\mu\boldsymbol{C}_N\mu^T\boldsymbol{M} \approx \boldsymbol{M}\mu\boldsymbol{C}_N^*\mu^T\boldsymbol{M}$$

再将(3-117)式代入上式，可得

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}\left(\sum_{i=1}^{n}2\zeta_i\omega_i\mu^{(i)}\mu^{(i)T}\right)\boldsymbol{M}$$

在实际计算时，上式的求和通常只需要考虑前若干阶基本振型与相应的固有频率。这相当于假设系统的高阶振型阻尼值为零。

3. 粘性阻尼系统的复模态方法

本方法的基本思想是：通过建立状态向量$\boldsymbol{Y}$将粘性阻尼在原始坐标中的n个耦合型自由振动方程组改造成具有复特征值的非耦合的一阶微分方程。在此基础上，可建立具有$2n$个特征值的特征方程式，从而导出复模态矩阵。利用复模态矩阵的正交性，即可使状态向量表达的振动方程解耦。

如前所述，建立在原广义坐标向量$\boldsymbol{q}$的基础上的n阶有阻尼自由振动方程组可写成

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

此时$\boldsymbol{C}$是耦合的，可以具有一般形式，而且$\boldsymbol{M},\boldsymbol{C},\boldsymbol{K}$是$n$阶对称的。为了建立新的解耦形式的运动方程，可将原方程改写成

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{3-120}$$

$$2n\times 2n \quad 2n\times 1 \quad 2n\times 2n \quad 2n\times 1 \quad 2n\times 1$$

引入$2n\times 1$阶的状态向量$\boldsymbol{Y}$，令

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}-\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}\end{bmatrix} \tag{3-121}$$

则(3-102)式可写成

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{0} \tag{3-122}$$

这样，原始坐标下的n个二阶运动方程被转化成(3-122)式所表达的$2n$个一阶方程，并称(3-122)为**状态方程**。用$\boldsymbol{A}^{-1}$左乘(3-122)式两边，并设

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \tag{3-123}$$

则可得

$$\dot{\boldsymbol{Y}} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0} \tag{3-121}$$

为了求特征值，由微分方程理论可假定上式的解为

$$Y = \psi e^{\gamma t} \quad (2n \times 1 \quad 2n \times 1) \tag{3-125}$$

式中 γ 为复数，ψ 为具有复数元素的 $(2n \times 1)$ 阶的模态向量，将(3-125)式代入(3-124)式得

$$[\gamma I - H]\psi = 0 \tag{3-126}$$

则特征方程为

$$\Delta(\gamma) = |\gamma I - H| = 0$$

在弱阻尼情况下，此方程有复共轭形式的 $2n$ 个特征值。将它们代入(3-126)式，即可得到相应的特征向量 ψ_i。因为 H 是 $2n$ 阶的，故有 $2n$ 个模态向量，它们组成 n 对共轭复数。将 $2n$ 个模态向量组合起来，即得到复模态矩阵 Ψ，且

$$\Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_{2n}] \tag{3-127}$$

模态向量对 A、B 是正交的，现证明如下：

将(3-125)式代入(3-122)式，消去公因子 $e^{\gamma t}$ 得

$$\gamma A\psi + B\psi = 0$$

对于第 r 阶模态与第 s 阶模态，将 γ_r 与 γ_s 代入上式得

$$\gamma_r A\psi_r + B\psi_r = 0$$

$$\gamma_s A\psi_s + B\psi_s = 0$$

将第一方程左乘 ψ_s^T 并将结果转置，用 ψ_r^T 左乘第二方程得

$$\begin{aligned} \gamma_r \psi_r^T A\psi_s + \psi_r^T B\psi_s = 0 \\ \gamma_s \psi_r^T A\psi_s + \psi_r^T B\psi_s = 0 \end{aligned} \tag{3-128}$$

将两式相减得

$$(\gamma_r - \gamma_s)\psi_r^T A\psi_s = 0$$

当 $\gamma_r \neq \gamma_s$ 时，由上式得

$$\psi_r^T A\psi_s = 0 \qquad (r \neq s) \tag{3-129}$$

经过类似的推导可得

$$\psi_r^T B\psi_s = 0 \qquad (r \neq s) \tag{3-130}$$

(3-129)式与(3-130)式表明，粘性阻尼系统对 A,B 有正交性。此二式与(3-76)式、(3-77)式类似；当 $r = s$ 时，此二式不再为零值。应用复模态对 A,B 的正交性，在组成复模态矩阵 Ψ 后，即可得到

$$\Psi^T A\Psi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & A & \\ & & \ddots \end{bmatrix}; \quad \Psi^T B\Psi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & B & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \tag{3-131}$$

式中 $\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & A & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & B & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ 为对角矩阵。这时只要引入新的状态向量 Z，令

$$Y = \Psi Z \tag{3-132}$$

则状态方程(3-122)在代入(3-132)式后就变成

$$A\Psi\dot{Z} + B\Psi Z = 0$$

将上式左乘 Ψ^T，并考虑到(3-131)式，可得

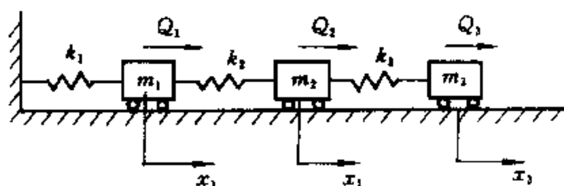
$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & A & \\ & & \ddots \end{bmatrix}\dot{Z} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & B & \\ & & \ddots \end{bmatrix}Z = 0$$

可见运动方程被解耦，变成一组非耦合的一阶微分方程，不过方程的阶数较原系统增加了一倍。

习　　题

3－1　如图(习题 3－1 图)所示弹簧质量系统，当取 x_1, x_2 和 x_3 为广义坐标时，试列出系统的运动方程。设 $m_1 = m_2 = m_3 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k$。

答：
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{Q} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}$$

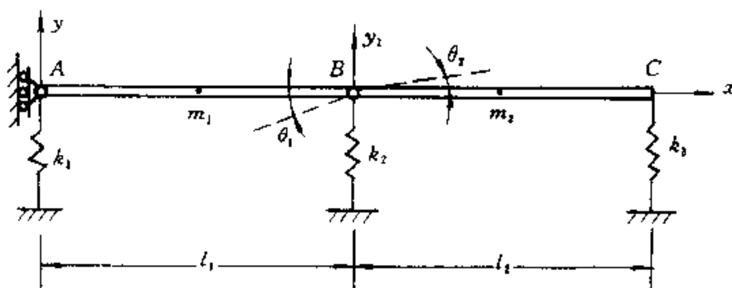


习题　3－1 图

3－2　如将上题改为用广义坐标，$z_1 = x_1, z_2 = x_2 - x_1, z_3 = x_3 - x_2$，试列出系统的运动方程，并与上题所得方程相比较。

答：
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 3m & 2m & m \\ 2m & 2m & m \\ m & m & m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q} = [Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad Q_2 + Q_3 \quad Q_3]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{X} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}$$

3－3　两根刚性杆，在 B 点处铰接在一起并用弹簧支承(见习题 3－3 图)。假设 $l_1 = l_2 = l, k_1 = k_2 = k_3 = k, m_1 = m_2 = m$，且两杆质量沿长度方向均匀分布。将 B 点的微小位移 y_1 和各杆绕 B 点的微小转角 θ_1 和 θ_2 作为广义坐标。试求此系统的质量矩阵和刚度矩阵。



习题　3－3 图

答：
$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2m & -ml/2 & ml/2 \\ -ml/2 & ml^2/3 & 0 \\ ml/2 & 0 & ml^2/3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3k & -kl & kl \\ -kl & kl^2 & 0 \\ kl & 0 & kl^2 \end{bmatrix}$$

3－4　试求题 3－1 所给系统的各阶固有圆频率及主振型。

答： $\omega_1 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}}$， $\omega_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}}$， $\omega_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\phi^{(1)} = [0.445 \quad 0.802 \quad 1.000]^T$

$\phi^{(2)} = [-1.247 \quad -0.555 \quad 1.000]^T$

$\phi^{(3)} = [1.802 \quad -2.247 \quad 1.000]^T$

3-5　试求题3-2所给系统的各阶固有圆频率及主振型，并与题3-4所得结果相比较。

答： $\omega_1 = 0.445\sqrt{\frac{k}{m}}$， $\omega_2 = 1.247\sqrt{\frac{k}{m}}$， $\omega_3 = 1.802\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\phi^{(1)} = [2.247 \quad 1.802 \quad 1.000]^T$

$\phi^{(2)} = [-0.802 \quad 0.445 \quad 1.000]^T$

$\phi^{(3)} = [0.555 \quad -1.247 \quad 1.000]^T$

3-6　试求题3-3所给系统的固有圆频率。

答： $\omega_1^2 = (3-\sqrt{3})\frac{k}{m}$， $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$， $\omega_3^2 = (3+\sqrt{3})\frac{k}{m}$

3-7　在图（习题3-7图）所示模型系统中，假设质量M与各个m都只能沿x方向运动，试确定系统的固有圆频率和相应的振型，要求各振型满足正交性条件。

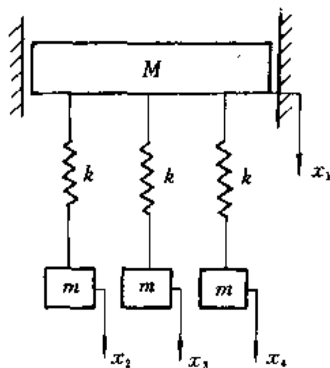
答： $\omega_1 = 0$， $\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}}$， $\omega_4 = \sqrt{\frac{(M+3m)k}{mM}}$

$\phi^{(1)} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

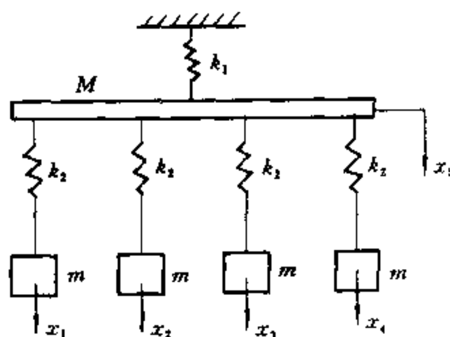
$\phi^{(2)} = [0 \quad -2 \quad 1 \quad 1]^T$

$\phi^{(3)} = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 1]^T$

$\phi^{(4)} = \left[-\frac{3m}{M} \quad 1 \quad 1 \quad 1\right]^T$



习题　3-7图



习题　3-8图

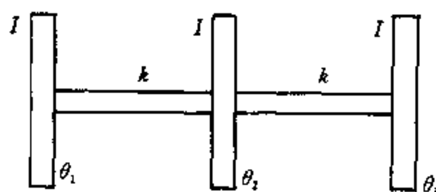
3-8　试求图（习题3-8图）所示弹簧质量系统的固有圆频率及主振型。设$k_1 = 6k$，$k_2 = k$，$M = 4m$。

答： $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$， $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \sqrt{\frac{k}{m}}$， $\omega_5 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$\phi^{(1)} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}]^T$　　$\phi^{(2)} = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

$\phi^{(3)} = [1 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 0]^T$　　$\phi^{(4)} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad -3 \quad 0]^T$

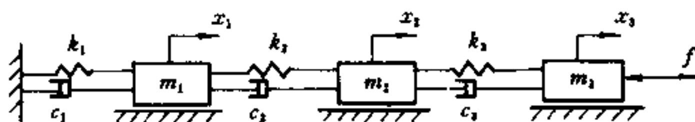
答：$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_0\cos\sqrt{\frac{k}{I}}t\\ 0\\ -\theta_0\cos\sqrt{\frac{k}{I}}t\end{bmatrix}$



答：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.179 \begin{bmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{bmatrix} \frac{F}{k} \cos(\omega t - \theta_1) - 2.810 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.445 \\ -0.802 \end{bmatrix} \frac{F}{k} \cos(\omega t - \theta_2) +$

$$0.113 \begin{bmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.555 \end{bmatrix} \frac{F}{k} \cos(\omega t - \theta_3)$$

$$\theta_1 = 177°39', \theta_2 = 87°3', \theta_3 = 7°30'$$



习题　3－11图

第四章 连续系统

§4.1 前 言

实际上飞行器结构的质量元件与无质量弹性元件不是明显分开的，而是有连续分布的质量及刚度，或者分布质量及集中质量都有。在数学上需要用时间和空间坐标的连续函数来描述它的运动状态，因而所得的运动方程是偏微分方程。本章对连续系统作导论性的介绍，主要介绍连续体运动方程的建立及其振动性质，所涉及的课题与多自由度系统相似，并且只讨论线性连续体模型在稳定平衡位置附近做微幅振动，它必须满足以下条件：

(1) 材料是均匀、连续、各向同性的；

(2) 在所有情况下应力都不超过弹性极限，并服从虎克定律；

(3) 变形是微小的，并满足连续条件。

§4.2 杆的纵向振动

本节只限于讨论受轴向激励的等截面细长杆，如图4-1(a)所示。由于轴向力的作用，沿着杆的轴线方向将产生位移u，它是位置x与时间t的函数。设在瞬时t，点x及$x+\mathrm{d}x$处的轴向位移为u及$u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$，对应于这两点的内力为$N$和$N+\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x$，如图4-1(b)所示。由虎克定律知

$$\frac{N}{A}=E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4-1}$$

式中 N —— x处的轴向力；

A —— 杆的横截面积；

E —— 弹性模量。

由牛顿第二定律知

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(N+\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-N \tag{4-2}$$

式中$\mathrm{d}m$为微元$\mathrm{d}x$的质量。若ρ为单位体积质量，则有

$$\mathrm{d}m=\rho A\mathrm{d}x$$

将上式代入(4-2)式，化简后得运动方程

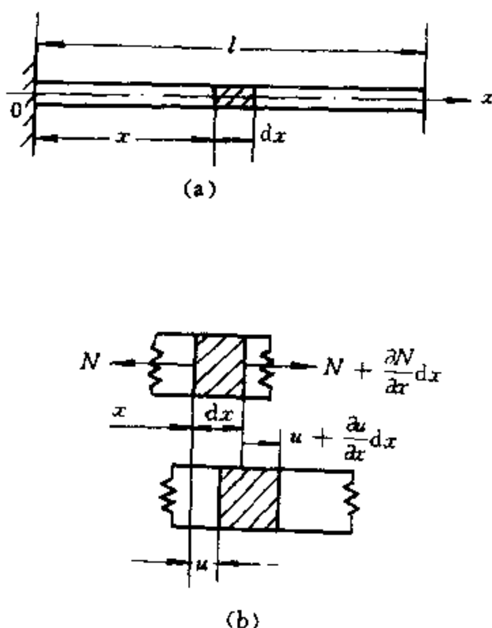


图 4-1

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(AE\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4-3}$$

由于 A,E 是常数，故(4－3) 式可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4-4}$$

式中 a 为弹性纵波沿 x 轴的传播速度，且 $a^2 = \frac{E}{\rho}$。

(4－4) 式是典型的波动方程，可用分离变量法求解，设

$$u(x,t) = \phi(x)P(t) \tag{4-5}$$

式中 $\phi(x)$ 只是 x 的函数，称为特征函数或振型函数，$P(t)$ 只是时间 t 的函数，决定着振动过程。将(4－5) 式代人(4－4) 式得

$$\frac{a^2}{\phi(x)}\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{P(t)}\frac{\mathrm{d}^2P(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

因上式左边与 t 无关，右边与 x 无关，故每边必须是一常数。需要把常数假定为负实数 $-\omega^2$，上式才有非零振动解；于是由上式可得两个常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{a^2}\phi(x) = 0 \tag{4-6A}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2P(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2P(t) = 0 \tag{4-6B}$$

由(4－6A) 式可解得振型函数

$$\phi(x) = C_1\sin\frac{\omega x}{a} + C_2\cos\frac{\omega x}{a} \tag{4-7A}$$

式中积分常数 C_1,C_2 由边界条件决定。而(4－6B) 式与单自由度无阻尼自由振动形式相同，其解为

$$P(t) = C_3\sin\omega t + C_4\cos\omega t \tag{4-7B}$$

积分常数 C_3,C_4 由初始条件决定，显然，(4－7A) 式与(4－7B) 式是通过圆频率 ω 互相联系的。将(4－7) 式代人(4－5) 式，即得到(4－4) 式的解

$$u(x,t) = \left(C_1\sin\frac{\omega x}{a} + C_2\cos\frac{\omega x}{a}\right)(C_3\sin\omega t + C_4\cos\omega t) \tag{4-8}$$

杆作纵向振动的典型边界条件见表 4－1。

表 4－1

端部状态	左边界条件	右边界条件
固　　定	$u(0,t) = 0$	$u(l,t) = 0$
自　　由	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
弹簧载荷	$ku = EA\frac{\partial u}{\partial x}$	$ku = -EA\frac{\partial u}{\partial x}$
惯性载荷	$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA\frac{\partial u}{\partial x}$	$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EA\frac{\partial u}{\partial x}$

用图 4－2 说明弹簧与惯性载荷。例如，带有惯性载荷时，惯性力等于杆中变形所引起的力。

例 4－1　长为 l 的等截面直杆左端固定而右端通过刚度为 k 的弹簧固定时，试求系统的轴

向振动固有特性(图 4-2(a))。

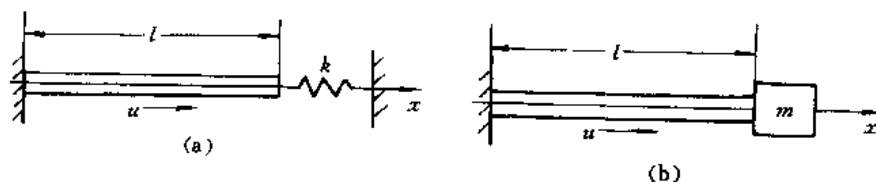


图 4-2

解 由表 4-1 可知杆的边界条件为

左端 $x=0 \quad u=(0,t)=0 \quad \varphi(0)=0$

右端 $x=l \quad EA\dfrac{\mathrm{d}\varphi(l)}{\mathrm{d}x}=-k\varphi(l)$

将上述边界条件代入(4-7A)式,得 $C_2=0$ 及

$$EA\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega l}{a}=-k\sin\frac{\omega l}{a}$$

由上式可根据 k 值解出不同的固有圆频率 ω,称为频率方程。例如 $k=0$ 时相当于自由端,频率方程为 $\cos\dfrac{\omega l}{a}=0$,可解出无限多阶固有频率

$$\omega_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

相应的振型为

$$\varphi^{(n)}(x)=A_n\sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

前三阶主振型如图 4-3(a) 所示。

如果 $k=\infty$,该边界相当于固定端,频率方程为

$$\sin\frac{\omega l}{a}=0$$

且

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

相应的主振型

$$\varphi^{(n)}(x)=A_n\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

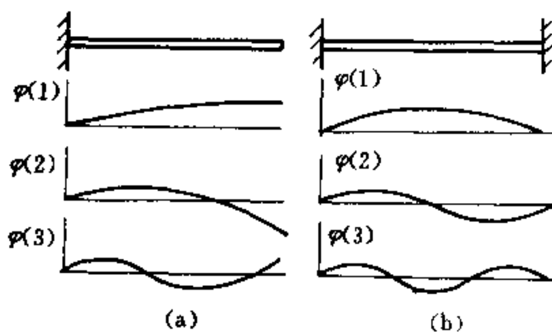


图 4-3

显然,连续系统的固有频率及主振型有无穷多阶。

§4.3 梁的横向振动

梁的横向振动就是等截面细直梁的弯曲振动。假定梁各截面对称,且形心的连线(即轴线)是直线,振动中轴线始终在对称平面(即 xoy 平面)内,如图 4-4(a) 所示。这时只研究梁的弯曲变形,不考虑剪切变形与转动惯量的影响,材料力学的平面假定仍然有效,也不考虑截面绕中

性轴转动的影响。因此，梁上各点的运动只需用其轴线的横向位移 $w(x,t)$ 来描述。

一、运动方程

设 ρ 为单位体积质量，EJ 为截面抗弯刚度，A 为横截面积，P 为单位长度上的分布力。取微元 dx 研究，其受力图如图 4-4(b) 所示。图中 $Q(x,t)$ 为剪力，$M(x,t)$ 为弯矩，各力的正向如图所示。由牛顿第二定律知，微元沿 y 方向的运动方程为

$$Q-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)+Pdx=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dx$$

简化后得

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial Q}{\partial x}=P \qquad (4-9)$$

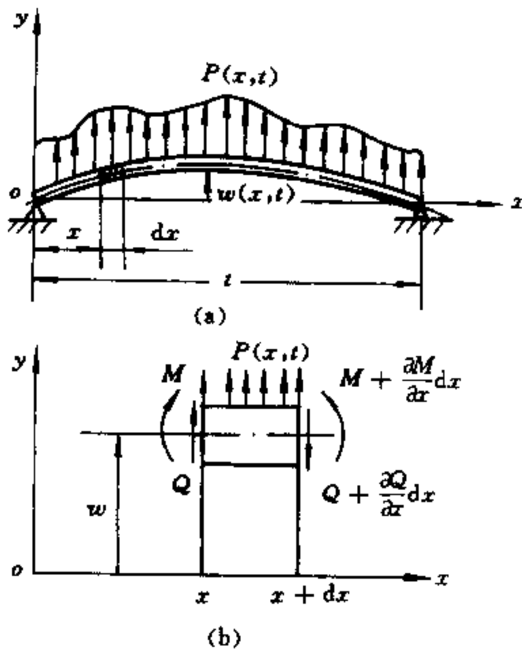


图 4-4

由于忽略截面转动的影响，考虑微元在 $(x-dx)$ 点处力矩的平衡可得

$$M+\frac{\partial M}{\partial x}dx-M-Qdx=0$$

化简后得

$$Q=\frac{\partial M}{\partial x}$$

将上式代入(4-9)式得

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=P \qquad (4-10)$$

由材料力学知，梁的弯矩与其曲率有下列关系

$$EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=M$$

将上式代入(4-10)式，则得梁横向振动的运动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P(x,t) \qquad (4-11)$$

如果不存在外激励，则其无阻尼自由振动方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (4-12)$$

对于等截面均质直梁，A,ρ,E,J 均为常数。令 $a^2=EJ/\rho A$，则(4-12)式变成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \qquad (4-13)$$

二、无阻尼自由振动及主振动

(4-13)式的求解可采用分离变量法。假定解具有下面形式

$$w(x,t)=\phi(x)q(t)$$

将上式代入(4-13)式，化简后得

$$-a^2\frac{1}{\phi}\frac{d^4\phi}{dx^4}=\frac{1}{q}\frac{d^2 q}{dt^2} \qquad (4-14)$$

根据(4-14)式的特点，此方程的两边必须等于同一常数。设此常数为 $-\omega^2$，可得下面两个常微分方程：

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} - \beta^4\phi = 0 \tag{4-15}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \tag{4-16}$$

式中 $\beta^4 = \frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\rho A}{EJ}\omega^2$ 或 $\omega = \beta^2\sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$，$\omega$ 为固有圆频率。

设(4-15)式的基本解为 $\phi(x) = e^{sx}$，则特征方程为

$$s^4 - \beta^4 = 0$$

其特征根为 $\pm i\beta$ 和 $\pm\beta$，则其通解为

$$\phi(x) = C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x + C_3\sinh\beta x + C_4\cosh\beta x \tag{4-18}$$

这就是梁横向振动的振型函数。式中积分常数 C_1, C_2, C_3, C_4 由边界条件确定。利用梁两端的四个边界条件可建立四个线性齐次方程，从而导出频率方程，确定固有频率 ω_n 和主振型 $\phi^{(n)}(x)$。为了求 $q(t)$，可利用(4-16)式，它与单自由度无阻尼自由振动方程相同，其解为

$$q(t) = C_5\cos\omega t + C_6\sin\omega t$$

式中常数 C_5, C_6 由初始条件决定，而且可写成

$$q(t) = \frac{\dot{q}(0)}{\omega}\sin\omega t + q(0)\cos\omega t \tag{4-19}$$

因此，梁横向振动运动方程的解为

$$w(x,t) = (C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x + C_3\sinh\beta x + C_4\cosh\beta x)\left(\frac{\dot{q}(0)}{\omega}\sin\omega t + q(0)\cos\omega t\right) \tag{4-20}$$

由于连续系统的频率方程是一个超越方程，有无穷多解，故其固有频率及主振型有无穷多阶。它们也是由该梁特定的物理性质、几何尺寸与边界条件所决定的。其典型边界条件见表 4-2。

表 4-2

端部状态	挠度 w	转角 $Q = \frac{\partial w}{\partial x}$	梁右端弯矩 $M = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	梁右端剪力 $Q = EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$
固定	$w = 0$	$\theta = 0$		
自由			$M = 0$	$Q = 0$
铰支	$w = 0$		$M = 0$	
弹簧载荷			$M = -k_t\frac{\partial w}{\partial x}$	$Q = kw$
惯性载荷			$M = 0$	$Q = \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

弹簧载荷的边界条件见图 4-5(a)，惯性载荷的边界条件见图 4-5(b)。

例 4-2 求图 4-6(a) 所示简支梁的固有特性。

解 边界条件

(1) $w(0,t)=\phi(0)=0$　　　　(2) $M(0,t)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x^2}=0$

(3) $w(l,t)=\phi(l)=0$　　　　(4) $M(l,t)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t)=\frac{\partial^2\phi(l)}{\partial x^2}=0$

将以上四个边界条件代入(4-18)式得

$$C_2=C_4=0$$

及

$$C_1\sin\beta l+C_3\sinh\beta l=0$$
$$-C_1\sin\beta l+C_3\sinh\beta l=0$$

两式相加得

$$2C_3\sinh\beta l=0$$

由于双曲正弦函数不恒为零,故有 $C_3=0$,则得频率方程

$$\sin\beta l=0$$

它的根为

$$\beta_n l=n\pi\qquad(n=1,2,\cdots)$$

由于 $\beta^4=\omega^2/a^2$,故固有频率有无穷多阶

$$\omega_n=a\beta_n^2=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

令(4-18)式中 $C_2=C_3=C_4=0$,则相应的主振型为

$$\phi^{(n)}(x)=C_1\sin\beta_n x=C_1\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\qquad(n=1,2,3,\cdots)\qquad(4-21)$$

其前三阶主振型如图 4-6(b) 所示。这里再次证明了:连续系统的固有频率和主振型有无穷多阶。

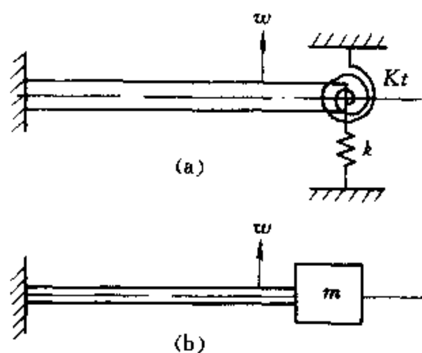


图 4-5

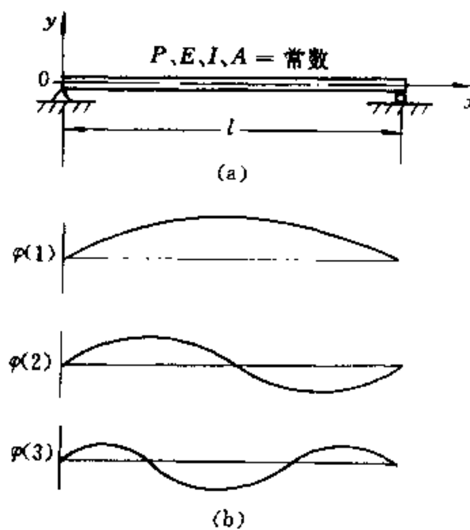


图 4-6

三、主振型的正交性

从前面的研究中可知,连续系统的主振型有无穷多阶。通过与研究多自由度系统基本相同

的途径可以证明，连续系统在两个不同阶的主振型 $\phi^{(m)}(x)$，$\phi^{(n)}(x)$ 之间也同样地存在正交性 $(m \neq n)$，不过这一特性将以积分形式来表达。

以梁为例。设 $\phi^{(m)}(x)$ 和 $\phi^{(n)}(x)$ 表示与 m 阶、n 阶固有频率 ω_m，ω_n 相对应的两个不同阶的主振型函数。根据(4-15)式可得

$$\left.\begin{aligned} EJ\frac{\mathrm{d}^4\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^4} &= \omega_m^2\rho A\phi^{(m)}(x) \\ EJ\frac{\mathrm{d}^4\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^4} &= \omega_n^2\rho A\phi^{(n)}(x) \end{aligned}\right\} \tag{4-22}$$

将(4-22)式的第一式乘以 $\phi^{(n)}(x)$，第二式乘以 $\phi^{(m)}(x)$，而后两式相减，再在梁的全长上对 x 进行积分得

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2)\int_0^l \rho A\phi^{(m)}x\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^l EJ(\phi^{(n)}(x)\frac{\mathrm{d}^4\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^4} -$$

$$\phi^{(m)}(x)\frac{\mathrm{d}^4\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^4}\mathrm{d}x = EJ\Big[\phi^{(n)}(x)\frac{\mathrm{d}^3\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^3}\Big|_0^l - \frac{\mathrm{d}\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^3}\Big|_0^l -$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_0^l + \frac{\mathrm{d}\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_0^l\Big] \tag{4-23}$$

上式右边实际上是 $x=0$ 和 $x=l$ 的边界条件。对于前面所述的固定、简支、自由端三种边界条件的任意组合，(4-23)式的右边恒等于零。由于当 $m \neq n$ 时，$\omega_m \neq \omega_n$，故由(4-23)式得

$$\int_0^l \rho A\phi^{(m)}(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0$$

或

$$\int_0^l \phi^{(m)}(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{4-24}$$

当 $m=n$ 时(4-23)式自然能满足，记

$$\int_0^l \rho A\phi^{(n)2}(x)\mathrm{d}x = M_n$$

式中　M_n—— 第 n 阶振型的广义质量。

若取 $\phi^{(m)}$，$\phi^{(n)}$ 为正规振型，则 $m=n$ 时

$$\int_0^l \rho A\phi^{(n)2}(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{4-25}$$

(4-24)、(4-25)式表明梁的主振型对质量的正交性。

将(4-22)式的第一式乘以 $\phi^{(n)}(x)$ 并在梁的全长上对 x 进行积分时有

$$\omega_m^2\int_0^l \rho A\phi^{(m)}(x)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \int_0^l EJ\phi^{(n)}(x)\frac{\mathrm{d}^4\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^4}\mathrm{d}x =$$

$$EJ\phi^{(n)}(x)\frac{\mathrm{d}^3\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^3}\Big|_0^l - EJ\frac{\mathrm{d}\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\Big|_0^l +$$

$$\int_0^l EJ\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x \tag{4-26}$$

将(4-24)式代入(4-26)式，考虑到边界条件可知，$m \neq n$ 时

$$\int_0^l EJ\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2\phi^{(m)}(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = 0 \tag{4-27}$$

(4-27)式表明主振型对刚度的正交性。

利用主振型的正交性，可以仿效对 n 阶多自由度系统处理问题的方法，将自由振动与强迫振动简化为 n 个单自由度系统来求解。

四、无阻尼强迫振动

在求得梁横向振动的固有特性后，应用振型叠加法可以计算任意激励下梁的响应。本节的讨论也可以说是振型叠加法对连续系统应用的一例。为讨论方便起见，还是采用均质的等截面的直梁，其运动方程由(4-11)式可写成如下形式

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P(x,t) \tag{4-28}$$

设上式的解为 $w(x,t)$，系统固有频率为 ω_n，正规振型函数为 $\phi^{(n)}(x)$，正规坐标为 $\eta_n(t)$。

令

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\eta_n(t) \tag{4-29}$$

将(4-29)式代入(4-28)式

$$\rho A\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\ddot{\eta}_n(t)+EJ\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^4\phi^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x^4}\eta_n(t)=P(x,t) \tag{4-30}$$

由(4-15)式知

$$EJ\frac{\mathrm{d}^4\phi(x)}{\mathrm{d}x^4}=\omega^2\rho A\phi(x)$$

将上式代入(4-30)式得

$$\rho A\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\ddot{\eta}_n(t)+\rho A\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\phi^{(n)}(x)\eta_n(t)=P(x,t) \tag{4-31}$$

将(4-31)式两边乘以 $\phi^{(m)}$，并从 0 至 l 对 x 进行积分。根据主振型的正交性，(4-31)式的左边只剩下 $n=m$ 的项，其余各项均为零，故可得一组独立的常微分方程

$$\ddot{\eta}_n+\omega_n^2\eta_n=Q_n(t)\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4-32}$$

式中 Q_n—— 对应于正规坐标的广义力，且

$$Q_n(t)=\int_0^l P(x,t)\phi^{(n)}(x)\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{4-33}$$

方程(4-32)表示关于 n 阶振型的单自由度系统无阻尼强迫振动。由单自由度系统理论知其全解包括两部分：一部分是对应于齐次方程的通解，即自由振动解，这在前面已讨论过。只要给定边界条件和初始条件，即可求得此响应。另一部分是对应于非齐次方程的特解；在给定激励函数 $P(x,t)$ 后，即可得到激励的强迫响应。因此，(4-32)式的通解为

$$\eta_n(t)=\eta_{n0}\cos\omega_n t+\frac{\dot{\eta}_{n0}}{\omega_n}\sin\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-34}$$

式中 η_{n0}、$\dot{\eta}_{n0}$ 分别表示广义坐标和广义速度的初始值，由初始条件决定。将(4-34)式代入(4-29)式，可得到在初始条件下任意激励 $P(x,t)$ 的响应

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi^{(n)}(x)\left[\eta_{n0}\cos\omega_n t+\frac{\dot{\eta}_{n0}}{\omega_n}\sin\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{4-35}$$

式中 η_{n0}、$\dot{\eta}_{n0}$ 可以用已知的初始条件代入(4-29)式计算出来。设初始条件为 $t=0$ 时 $w(x,0)=w_0(x)$，$\dot{w}(x,0)=\dot{w}_0(x)$，由(4-29)得

$$w_0(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\phi^{(m)}(x)\eta_m(0)=\sum_{m=1}^{\infty}\phi^{(m)}(x)\eta_{m0}$$

将上式两边乘以 $\rho A\phi^{(n)}$，然后对 x 在梁的全长上进行积分，并根据主振型正交性的表达式(4-24)、(4-25)，可得

$$\eta_{n0}=\int_0^l \rho A w_0 \phi^{(n)} \mathrm{d}x \tag{4-36}$$

用同样的方法可得

$$\dot{\eta}_{n0}=\int_0^l \rho A \dot{w}_0 \phi^{(n)} \mathrm{d}x \tag{4-37}$$

例 4-3 图 4-7 所示为一简支梁，因作用于中央处的力 P 而产生静变形。已知梁长为 l，弯曲刚度为 EJ，单位长度质量为 ρA，求力 P 突然取消后梁的响应。

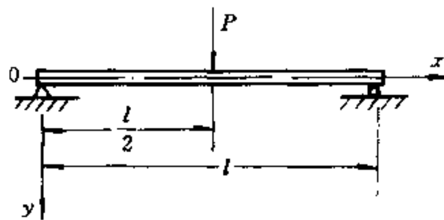


图 4-7

解 由例 4-2 知简支梁的固有频率为

$$\omega_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

相应的主振型为

$$\phi^{(n)}(x)=C_1\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为确定正规振型函数，由(4-25)式知

$$\int_0^l \rho A\phi^{(n)2}(x)\mathrm{d}x=\int_0^l \rho A\left(C_1\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2\mathrm{d}x=1$$

由上式可解得

$$C_1=\sqrt{\frac{2}{\rho A l}}$$

则正规振型函数

$$\phi^{(n)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho A l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

因为 $t=0$ 时梁处于静挠度曲线状态，故初始条件为

$$w_0(x)=\begin{cases}\dfrac{Px}{48EJ}(3l^2-4x^2) & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{l}{2}\\[2ex] \dfrac{P(l-x)}{49EJ}[3l^2-4(l-x)^2] & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

$$\dot{w}_0(x)=0$$

由(4-36)式知

$$\eta_{n0}=\int_0^{\frac{l}{2}}\rho A\frac{Px}{48EJ}(3l^2-4x^2)\sqrt{\frac{2}{\rho A l}}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l}\rho A\frac{P(l-x)}{48EJ}[3l^2-4(l-x)^2]\sqrt{\frac{2}{\rho A l}}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x=$$

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\rho A}{l}}\dfrac{Pl^4}{\pi^4 EJn^4}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n=1,3,5,\cdots)\\ 0 & (n=2,4,6,\cdots)\end{cases}$$

$$\dot{\eta}_{n0}=0$$

将 $\eta_{n0}, \dot{\eta}_{n0}$ 的表达式代入(4-35)式得响应为

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n)}(x)\left[q_{n0}\cos\omega_n t + \frac{\dot{q}_{n0}}{\omega_n}\sin\omega_n t\right] =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\rho A l}}\sqrt{\frac{2\rho A}{l}}\frac{Pl^3}{\pi^4 EJ}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4}\cos\omega_n t\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) =$$

$$\frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^4}\cos\omega_n t\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

§4.4 矩形薄板的横向振动

讨论这一问题时，我们仍然采用弹性力学关于硬板理论的全部假定。坐标系如图 4-8 所示。将板未变形时的中面规定为 xOy 面，x 轴和 y 轴平行于板的两边。规定板是等厚度的，厚度为 h，故板的两个自由表面为 $z = \pm\frac{1}{2}h$。由硬板理论知道，板的挠度 w 只与 x,y 有关，故在动态情况下 w 是 x,y,t 的函数，而且沿 x 轴方向的位移分量 u 为

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$

沿 y 方向的位移分量 v 为

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{4-38}$$

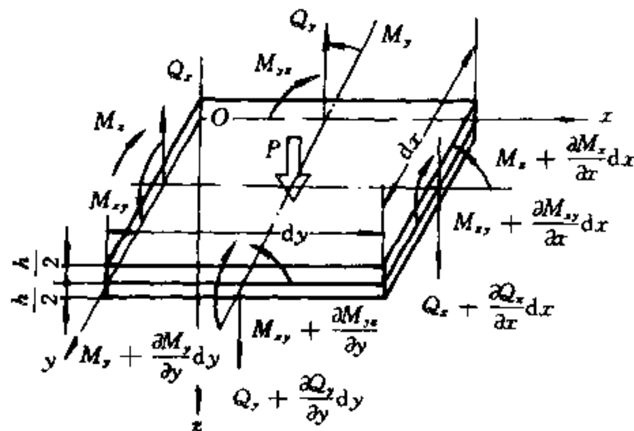


图 4-8

相应的应变分量考虑到(4-38)式得

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned} \tag{4-39}$$

(4-39)

忽略与中面平行的各面上的正应力($\sigma_z = 0$)，根据虎克定律，考虑到(4-39)式，则三个主

$$
\left.\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z \mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z \mathrm{d}z = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
H_x &= -H_y = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z \mathrm{d}z = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}\right\} \tag{4-41}
$$

式中 M_x、M_y 分别是单位长度板上绕 x 和 y 轴的弯矩，H 是单位长度板上的扭矩，D 称为硬板的弯曲刚度，且

$$
D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu)^2} \tag{4-42}
$$

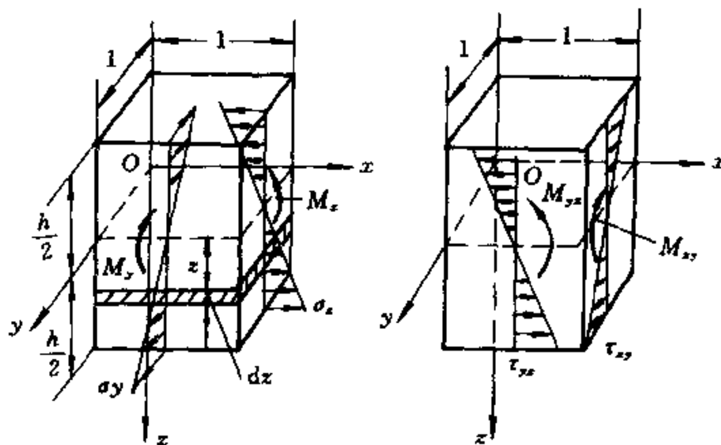


图 4-9

为了导出硬板的振动微分方程，取边长为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 的板微元体，其微元受力图如图 4-8 所示。图中各力均表示正向，$P(x,y,t)$ 是作用在板的单位面积上的外载荷，其正向与 z 轴方向一致。此外，当板作横向振动时，沿 z 方向还有单位面积上的惯性力 $-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$。其中 ρ 是板的质量密度，ρh 是板的单位面积质量。利用微元体的动平衡条件，通过在 z 方向取平衡，以及对 y 轴和 x 轴的力矩平衡，可以推导出动平衡方程式

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\
\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
-\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial H_x}{\partial x} + Q_y &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4-43}
$$

将(4-41)式代入(4-43)式，就得到用 w 及其导数表示的板单元动平衡方程式

$$
D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x,y,t) \tag{4-44}
$$

式(4-44)就是所求的板振动微分方程。

当板作自由振动时，(4-44) 可写成

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{4-45}$$

对于板的动力学问题来说，$w(x,y,t)$ 必须既满足振动微分方程(4-44)或(4-45)，又满足板的边界条件。标准的简单边界条件有固定边，简支边和自由边三种，现以图 4-10 所示的矩形平板为例加以说明。

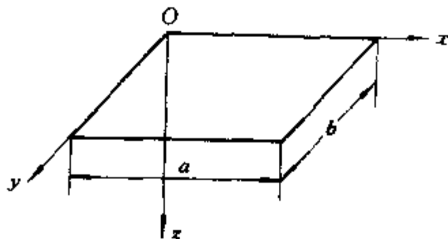


图 4-10

固定边

$w=0$、$\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$ (对于边界 $x=0,x=a$)

$w=0$、$\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ (对于边界 $y=0,y=b$)

简支边

$w=0$、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ (对于边界 $x=0,x=a$)

$w=0$、$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ (对于边界 $y=0,y=b$)

自由边

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=0$ (对于边界 $x=0,x=a$)

$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\dfrac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}=0$ (对于边界 $y=0,y=b$)

在实际工作问题中，分析模型的四边可以由上述三种情况任意组合。

对于板的自由振动微分方程，也可以用分离变量法来求解。为此，设方程(4-45) 的解为

$$w(x,y,t)=W(x,y)e^{i\omega t} \tag{4-46}$$

式中 W —— 振型函数

ω —— 固有圆频率

$i=\sqrt{-1}$。

将(4-46) 式代入(4-45) 式得

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-k^4W=0 \tag{4-47}$$

其中

$$k^4=\frac{\rho h}{D}\omega^2 \tag{4-48}$$

与此同时，将(4-46) 式代入边界条件，即可得到用振型函数 W 表示的边界条件。很明显，只需将原来的边界条件表达式中的 w 改换成 W，即成为所求的边界条件表达式。下面以四边简支的矩形平板为例讨论其自由振动解。可令此种板的振型函数为

$$W_{m,n}=A_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{4-49}$$

显然，当 m,n 为正整数时，上式满足四边简支的边界条件。将(4-49) 式代入(4-47) 式可得

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4-k^4\right]A_{m,n}=0 \tag{4-50}$$

如果$W_{m,n}$是自由振动解的振型函数，则必须使(4-50)式也能满足。又因为$A_{m,n}$不恒等于零，故有

$$k^4 = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 \tag{4-51}$$

根据上式和(4-48)式可求得固有圆频率

$$\omega_{m,n} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(m^2 + \frac{a^2n^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (m,n = 1,2,\cdots) \tag{4-52}$$

(4-51)式称为频率方程。

如果是正方形板，根据(4-52)式即可得到一系列的固有频率

$$\omega_{11} = \frac{2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}},\ \omega_{12} = \omega_{21} = \frac{5\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}},\ \omega_{22} = \frac{8\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}},\cdots$$

根据(4-49)式，各相应的主振型都画于图4-11上。从(4-49)式可见，板作主振动时，其上有若干条在任意时间t挠度恒为零的线——节线(即图4-11上的虚线)。对四边简支的矩形平板而言，m和n分别表示x方向y方向的半波数，而$(m-1)$和$(n-1)$则分别表示与x轴和y轴相平行的节线数。值得注意的是：对正方板而言，当$m \neq n$时，固有频率是重根；因此，对于同一个固有频率，主振型并不是唯一的。

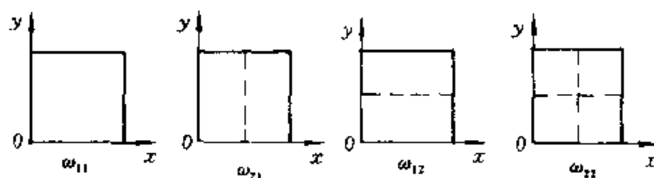


图 4-11

实际上，对于板的振动问题，除了少数情况可以导出其精确的解析解外，在更多情况下要找到其精确解的简单数学表达式是非常困难的。所以，一般可采用近似解法，如瑞雷-李兹法和有限元素法等。

习　　题

4-1　一等直杆，长为l，单位体积质量为ρ，用一刚度为k的弹簧悬挂，如图(习题4-1图)所示。求系统纵向振动的频率方程。

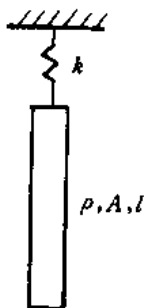
答：$\dfrac{\omega l}{a}\tan\left(\dfrac{\omega l}{a}\right) = \dfrac{kl}{EA},\ a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

4-2　求图(习题4-2图)示阶梯杆纵向振动时的频率方程。其中$\rho_1 = \rho_2 = \rho$。

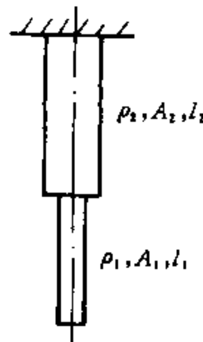
答：$\tan\left(\dfrac{\omega}{a}l_1\right)\tan\left(\dfrac{\omega}{a}l_2\right) = \dfrac{A_2}{A_1}$

4-3　一等直杆左端固定，右端附一重量为 W 的重物并和弹簧相连，如图（习题 4-3 图）所示。已知杆长为 l，单位长度的重量为 γA，弹簧的刚度为 k，杆的弹性模量为 E。求系统纵向自由振动的频率方程。

答：$EA\dfrac{\omega}{a}\cos\left(\dfrac{\omega}{a}l\right)-\dfrac{W}{g}\omega^2\sin\left(\dfrac{\omega}{a}l\right)+K\sin\left(\dfrac{\omega}{a}l\right)=0, a=\sqrt{\dfrac{Eg}{\gamma}}$



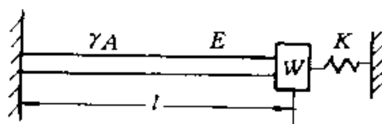
习题　4-1 图



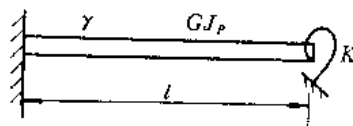
习题　4-2 图

4-4　一等直的圆轴，一端固定，另一端和扭转弹簧相连，如图（习题 4-4 图）。已知轴的抗扭刚度为 GJ_p，单位体积重量为 γ，长度为 l，弹簧的刚度为 K。求系统扭转振动的频率方程。（提示：对比杆的纵向振动和轴的扭转振动。）

答：$\tan\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)=-\dfrac{GJ_p}{Kl}\left(\dfrac{\omega l}{a}\right), a=\sqrt{\dfrac{Gg}{\gamma}}$



习题　4-3 图



习题　4-4 图

4-5　一悬臂梁左端固定，右端附有重物，如图（习题 4-5 图）所示。已知重物的重量为 W，梁的长度为 l，抗弯刚度为 EJ，单位长度重量为 γA，试求系统横向振动的频率方程

答：$\dfrac{W\omega^2}{gEJ\beta^3}=\dfrac{1+\cos(\beta l)\cosh(\beta l)}{\sin(\beta l)\cosh(\beta l)-\cos(\beta l)\sinh(\beta l)},\quad \beta^4=\dfrac{\omega^2}{a^2},\quad a^2=\dfrac{EJg}{\gamma A}$

4-6　在上题中，如右端改为一弹性支承，如图（习题 4-6 图），已知弹簧刚度为 K，试求系统横向振动的频率方程。

答：$\dfrac{K}{EJ\beta^3}=\dfrac{1-\cosh(\beta l)\cos(\beta l)}{\sinh(\beta l)\cos(\beta l)-\cosh(\beta l)\sin(\beta l)}$

4-7　试写出图（习题 4-7 图）所示一端固定一端滚支的梁的振型函数，并画出第一及第二阶主振型。

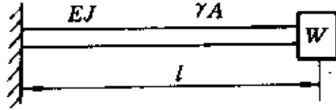
答：$Y_i(x)=\cosh(\beta_i x)-\cos(\beta_i x)+a_i[\sinh(\beta_i x)-\sin(\beta_i x)]$，

$$a_i=\frac{\cosh(\beta_i l)-\cos(\beta_i l)}{\sinh(\beta_i l)-\sin(\beta_i l)},\quad \beta_1 l=3.927,\quad \beta_2 l=7.069,$$

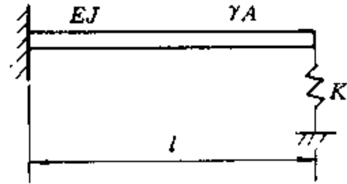
$\alpha_1 = 1.000\ 8, \alpha_2 = 1.000\ 0$

4-8 试求图(习题 4-8 图)所示悬臂等直杆在固定端受到纵向支承运动 $u_s(0,t) = d\sin\omega t$ 时的稳态响应。

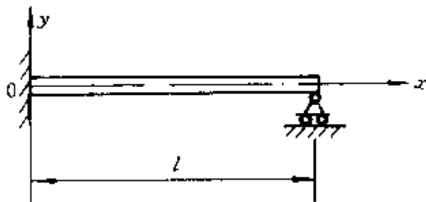
答： $u(x,t) = d\left[\tan\left(\frac{\omega}{a}l\right)\sin\left(\frac{\omega}{a}x\right) + \cos\left(\frac{\omega}{a}x\right)\right]\sin\omega t, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



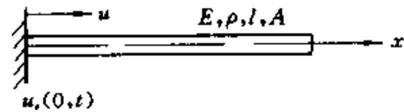
习题 4-5 图



习题 4-6 图



习题 4-7 图



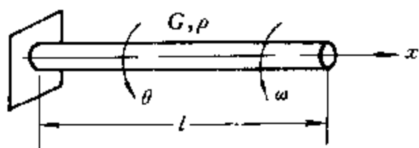
习题 4-8 图

4-9 图(习题 4-9 图)所示为一长为 l 的等直圆杆，以等角速度 ω 转动，某瞬时左端突然固定，求杆扭转振动的响应。

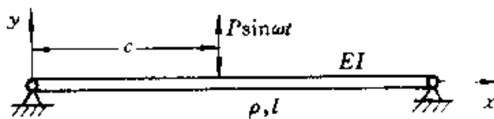
答：
$$\theta(x,t) = \frac{8\omega l}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\sin\left(\frac{\omega_n}{a}x\right)\sin\omega_n t =$$
$$\frac{8\omega l}{a\pi^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right) + \frac{1}{9}\sin\left(\frac{2\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right) + \frac{1}{25}\sin\left(\frac{5\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{5\pi a}{2l}t\right) + \cdots\right],$$
$$a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

4-10 均匀简支梁在 $x = c$ 处作用有一正弦力 $P\sin\omega t$，如图(习题 4-10 图)，求在零初始条件下的动响应。

答：
$$y(x,t) = \sum_i \phi_i(x)q_i(t)$$
$$\phi_i(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$
$$q_i(t) = \frac{2P\sin\left(\frac{i\pi c}{l}\right)}{\rho l(\omega_i^2 - \omega^2)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_i}\sin\omega_i t\right)$$
$$\omega = (i\pi)^2\sqrt{EI/\rho}$$



习题 4 9图



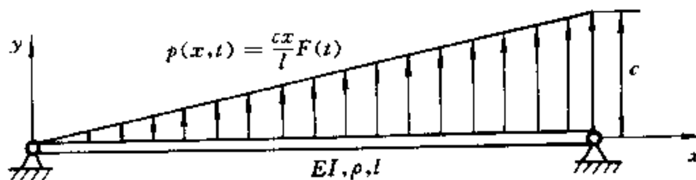
习题 4－10图

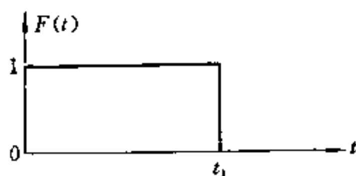
1－11 均匀简支梁受图（习题4－11图）示突加分布载荷 $p(x,t)=\frac{cx}{l}F(t)$ 的作用，求其动响应。

答： $y(x,t)=\sum_i q_i(t)\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$

$$q_i(t)=\begin{cases}(-1)^{i+1}\dfrac{2c}{i\pi\rho\omega_i^2}(1-\cos\omega_i t), & 当\ 0\leqslant t\leqslant t_1\\ (-1)^i\dfrac{2c}{i\pi\rho\omega_i^2}\{2[1-\cos\omega_i(t-t_1)]-(1-\cos\omega_i t)\}, & 当\ t_1\leqslant t\end{cases}$$

$$\omega_i=(i\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$





习题 4－11图

4－12 一边长为 a 的正方形薄板，四边简支，受到垂直于板面的均匀分布的激振力 $q=q_0\sin\omega t$ 的作用，求其稳态响应。

答： $$W(x,y,t)=\frac{16q_0}{\rho h\pi^2}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{mn(p_{mn}^2-\omega^2)}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}y\sin\omega t=$$

$$\frac{192(1-v^2)q_0a^4}{\pi^6Eh^3}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty}\times$$

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{mn(n^2+m^2)^2(1-\lambda_{mn}^2)}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{a}y\sin\omega t$$

$$\lambda_{mn}^2=\frac{\omega^2}{p_{mn}^2}$$

第二篇　飞行器结构固有振动特性分析

在飞行器设计中，通过结构固有振动特性分析与模态试验，为总体设计和控制系统设计提供模态参数。固有振动特性分析是解决以下问题的先决条件之一：

（1）外激励下结构动态响应分析；

（2）气动弹性稳定性分析；

（3）飞行器动载荷条件的确定；

（4）控制回路分析和结构、控制系统耦合干扰分析；

（5）飞行器内部装载与设备的减振设计；

（6）飞行器敏感元件合理位置的拟定；

（7）旋转稳定飞行器临界旋转速度的确定。

飞行器结构固有振动特性分析有以下特点。

（1）分析模型复杂，其自由度多。造成这一现象一方面是由于飞行器结构本身复杂，另一方面是由于飞行器内部或它与环境之间存在着耦合的可能性，往往要求计算前十阶甚至几十阶固有频率与振型。

（2）结构基本动力参量的时变性。由于整个飞行过程中飞行器结构组成发生变化（级间分离或对接），支持条件发生变化（发射导轨上运行或自由飞行等），燃料质量大小与分布发生变化、环境温度改变引起结构刚度随之变化等，都会使固有特性在飞行过程中不断改变。因此，求解时必须引入固化概念，研究重要特征点处的固有特性。

（3）非结构影响因素广泛存在。非结构影响因素对动力固有特性的影响往往不可忽视。例如，燃料贮箱液体晃动，构成既有惯性又有弹性的分系统；舱体充压使刚度提高；轴向过载造成的轴压使有效刚度下降；采用自旋姿态稳定的人造卫星，其旋转部件伴随的哥氏加速度与向心加速度使固有特性微分方程呈耦合形式；离心力的存在引入几何刚度，使有效刚度变化等。

（4）模态实验具有重要意义。由于飞行器结构复杂，拟定一个好的分析模型是困难的。只有通过模态试验来验证分析方法的正确性，掌握飞行器各部分结构的动行为特征，对分析模型的拟定给出权威性指导。另外，有些分析方法本身就包含着动力实验。例如：子结构综合技术的子结构基本矩阵可通过实验决定，全结构系统的基本矩阵则由分析决定。

飞行器结构固有振动分析通常采用数值方法。常用的近似方法可分两大类。一类是用一系列满足全部或部分边界条件的独立函数或它们的线性组合来近似逼近微分方程的解函数，它们不改变问题的力学模型，而只在解函数一级离散化，这类求解方法有瑞雷法、李兹法及振型迭代法等。此类方法一般计算量较少、计算精度较低，多用于估算工作。另一类则采用离散化分析模型，将无限自由度的连续系统简化成集总参数的有限自由度系统。这类方法有有限元素法、传递矩阵法以及由它们发展起来的动态子结构法、有限元一传递矩阵联合法、RICCATI法等。要篇只介绍第二类方法。

第五章　有限元素法与特征值问题

§5.1　结构动力有限元法理论与模型

一、基本原理

在实际问题的求解中,应用最广的是基于位移的有限元素法。此法的基本思想是把本来为连续的工程结构分割成在结点上相联的单元组合体。取这些结点的位移为基本未知量,并假定每个单元中的位移用单元位移函数来描述,这实质上是假定了单元的模态。在此基础上,利用能量变分原理可进行单元分析的全结构分析,得到全结构的振动平衡方程,从而把连续体的动力学问题化为多自由度系统的振动问题。有限元动力分析的基本过程是首先将工程结构离散化,通过选择合理的单元拟定出分析模型,在此基础上选择位移函数,进行单元分析、确定单元的刚度、质量、阻尼、载荷矩阵,再经过坐标变换,通过能量变分原理,进行全结构分析,建立系统的振动平衡方程。最后运用有限元数值方法进行方程的求解。

结构动力有限元法采用的单元位移函数与静力分析相同,基本原理与求解过程也与静力分析相同,不同之处仅在分析模型的拟定与运动方程的建立方面。

二、动态分析模型的拟定

由于结构动态分析中除考虑弹性力外,还要考虑惯性力和阻尼力,其运动方程是常微分方程组,所以动态分析的复杂程度高,计算工作量大,有限元分析模型要尽量精炼、简单。

1. 模型拟定的基本原则

(1) 分析模型应与分析的目的相适应。动力分析的目的各不相同。有的是为了提供固有特性计算动态响应或供控制系统用;有的是为了舱内提供振动环境。不同的目的,通常要求不同的模态数与计算精度。显然,用于估算基本固有频率的模型应当比计算冲击响应的模型简单。用于设计计算的模型应当比用于校核计算的模型简单。

(2) 分析模型应与所用的计算方法相适应。不同的解法要求不同的模型。与传递矩阵法对应的应是链式模型(如图 5-1(a) 所示)。与有限元法对应的则是由不同单元组成的离散模型(如图 5-1(b) 所示)。

(3) 模型应正确反映结构的实际特性。一个具体结构的动态特性,主要取决于质量、刚度的大小与分布,取决于结构边界条件与阻尼特性。因此,模型应尽量保持整个飞行器、甚至各部件的质量、质心位置不变,保证构造的刚度特性和传力路线基本不变。真实反映分析对象的边界条件与阻尼特性。因此,选取的单元应保持其几何形状、受力特性、变形特性与实际结构的几何形状特点、受力传力特点、变形特性相一致。例如,对于薄壁结构翼面或舱段,不应选用板、壳单元来模拟蒙皮。

(4) 分析模型应与计算工具、计算条件相适应。

2. 影响分析模型的主要因素

(1) 刚度分布。飞行器属于三维体，但根据动态行为特征对于具有互相正交的两个对称面的飞行器，有时可按二维处理；对于轴对称性强的导弹或发射器，当长细比很大时，往往可按一维模型处理。但是当具有明显的局部非对称性或当内部装载而引起严重耦合现象时，则需考虑采用三维模型。刚度的具体模型可分为：

(a) 刚体 —— 刚度视为无穷大，如舱体内部设备在进行全弹固有特性分析时可视为刚体；

(b) 集中刚度模型 —— 例如运载器级间连接接头或发动机连接支座处、设备支承处等模型化为集中线弹簧或集中扭转弹簧；

(c) 连续分布模型 —— 例如有限元素法的单元可采用杆、梁、板、壳等连续体。

有限元模型实际上是上述各种典型刚度模型的复合。如多级运载器可简化为分段连续、各段间用集中刚度连接的复合模型(如图 5－1 所示)。

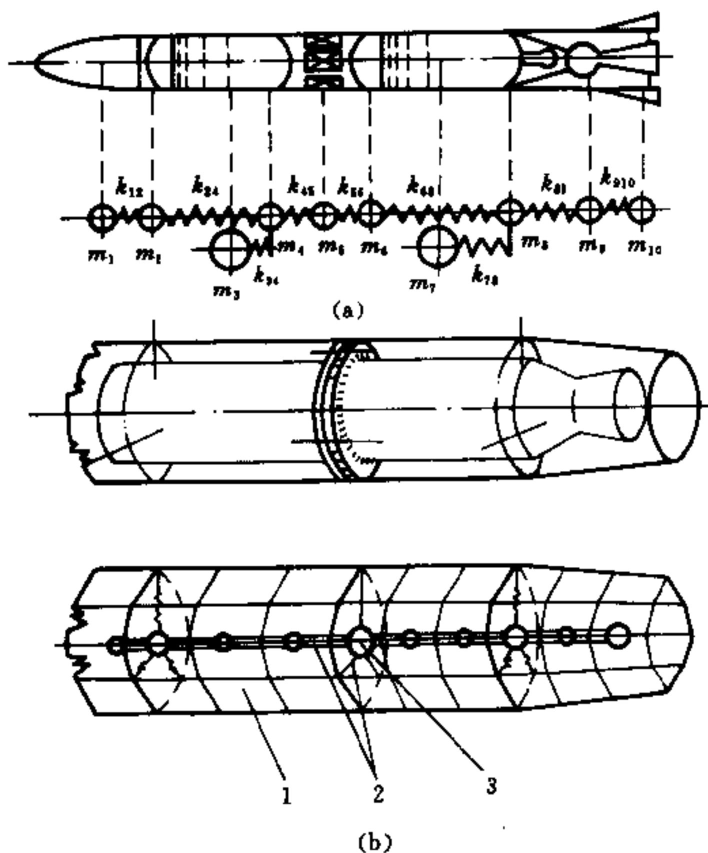


图 5－1　动态分析模型示意图

(a) 传递矩阵法模型；(b) 有限元素法模型

1— 板　2— 梁　3— 集中质量

此外，舱体内部压力、轴向载荷、定轴旋转等，将在飞行器数学模型中引起附加修正刚度。

(2) 质量分布。

(a) 集中质量模型 —— 将质量人为集中到选定的结点上。它是一个对角线矩阵，具形式为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix}$$

当质量均匀分布时，可将质量平均分配给各相关结点上。如果质量分布不均匀(如图 5－2 所示)，较简便的方法是酌情规定各结点所分担的区域，然后再把各区域质量分配给各结点。

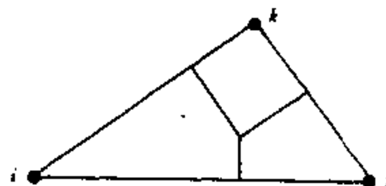


图 5－2

因为此种质量矩阵是一个对角线矩阵，便于一维存贮和进行对称分解。对于结构本身集中质量占相当优势的系统，或网格划分较细的系统可采用此模型，

(b) 一致质量模型。此类单元质量矩阵为

$$M_e = \iiint_{\Omega} \rho N^T N \mathrm{d}\Omega$$

式中　ρ —— 质量密度；

　　　N —— 单元位移函数矩阵。

它之所以称为一致质量矩阵是因为建立刚度矩阵和质量矩阵所用的位移插值函数是一致的。把所有单元质量矩阵叠加起来得到整个结构的总体质量矩阵。一致质量矩阵总是正定的满。

飞行器往往存在非结构质量。例如贮箱中液体晃动质量，对它无论是选用当量摆模型，还是采用弹簧质量系统，都要确定有效质量。它是整个液体质量的晃动部分，一般也以集中质量方式处理。

许多复杂结构常采用一致质量与集中质量的复合模型。例如，图 5－3 所示为“土星 V”所采用的复合模型。

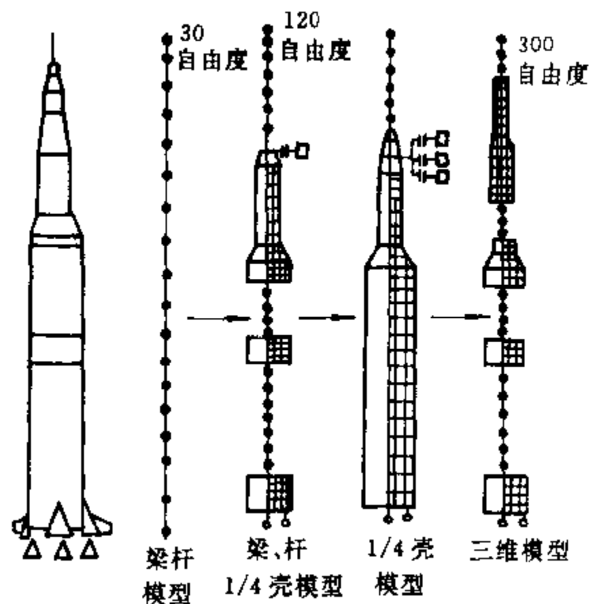


图 5－3

质量模型的选择通常要结合模型网格的疏密、单元的种类及结构特点，酌情决定。一般说来，单元划分较细、结构包含的集中质量(例如内部设备或配重块)多，则采用集中质量为宜。如果能用位移函数矩阵 N 组成动态时单元的真实变形，则采用一致质量矩阵得到的固有频率与振型比较可靠，而且接近真实值的上界。与一致质量矩阵相比，集中质量矩阵的形成以及以后的运算都比较方便，存储量少，给出的固有频率往往偏低，振型计算的误差较一致质量矩阵的情况大。总之，两种质量矩阵在计算精度上的优劣很难得出明确的结论。

(3) 边界条件。它包括全系统的边界条件和多级发射器级间的边界条件。由于振型、频率

对于边界条件很敏感，因而必须正确模拟边界条件，才能求准实际飞行器的动力分析结果。自由、固支边界条件较易解决，难处理的是弹性支持条件。发射器或导弹在发射架上、其级间连接边界均属于弹性连接边界。这些边界的支持刚度对固有特性及动态响应的影响较大，一般均需通过地面静力实验来解决。

总之，一个好的分析模型的拟定，依赖于综合考虑分析对象、采用的解法以及精度要求。综合平衡有效性与经济性，经过实验验证逐步修正，才能完善、合理地解决。另外，对同一个飞行器，其飞行阶段不同，任务要求不同，一般要采用不同的分析模型。如图 5-3 所示，其中 30 个自由度的集中质量一维模型，是在初步设计阶段和确定实验要求时采用的模型；而 300 个自由度的三维一维复合、集中质量一致质量复合模型，则是为确立控制系统敏感元件的位置和计算固有特性而拟定的分析模型。今后，我们将连续模型以外的其他模型系统称为**离散模型**，因为它们都是用离散参量来描述动态性能的。

3. 合理地进行结点布置与单元划分

在具体实施模型化工作时，必须正确布置结点或分割线、分割剖面的位置，确定有限元网格，实现工程结构的离散化。通常情况下，结点、分割线或分割剖面应置于结构几何形状、载荷以及材料特性发生突变之处。因此，结点位置宜取在以下位置处：

(1) 结构几何形状的拐点、结构开口处、厚度突变处；

(2) 载荷作用点；

(3) 应力集中点；

(4) 结构的约束点或支承处；

(5) 结构单元(部件或零构件)之间连接点；

(6) 结构中主要受力元件之间的相交点(连接点)；

(7) 要求输出位移或应力的点。

在进行网格划分时，首先应选择合理的单元。可供选择的单元很多。按形状分可分为一维、二维和三维单元，也可分为直线边单元和曲线边单元。直线边单元计算简单，曲线边单元容易较好地拟合复杂的几何形状，但计算工作量大。另外，单元也有高低精度之分。高精度单元虽然计算精度高，但自由度多，相应的计算规模大。拟定模型时，应该在满足精度要求的情况下，尽量选用简单的单元。而在具体划分网格时应考虑以下内容：

(1) 结构特性(几何形状、材料性能、边界条件等)和外力变化剧烈部位网格相对密一些。

(2) 二维和三维单元在各方向的长度比应尽量接近于 1，并避免畸形单元。例如三角形单元的边长比不应超过 1：3，多边形单元的相邻两边夹角不要接近 180° 等。

(3) 相邻单元的尺寸不宜相差太大。

(4) 选取不同元素相组合时，应考虑同一结点上不同元素间自由度的协调。

(5) 单元的疏密要视需要而定，除应力梯度大的区域外，不应片面追求密网格，以便缩小计算规模。对大型复杂结构，可考虑先进行整体粗网格计算，再根据粗算结果，对应力梯度大的区域进一步加密网格进行“细算”。

(6) 在条件合适时，应充分利用结构的对称性拟定网格与模型，以减小计算规模。

(7) 网格划分的结果应保证各单元的尺寸与单元的力学特性相符合。例如，对于普通的板单元，其边长应远大于板厚；对于梁单元，通常梁的长度应远大于其截面尺寸。如果出现了粗短梁，则应在单元分析中考虑剪切效应。

三、运动方程的建立

采用瞬时最小势能原理建立运动方程。

1. 单元分析

取单元内任意一点的位移向量 $y(x,t)$ 为基本未知量，它是位置 x 和时间 t 的函数。由有限元素法知

$$\boldsymbol{y}(x,t)=\boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{q}_e(t) \tag{5-1}$$

而且

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_e \tag{5-2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5-3}$$

式中　$N(x)$ —— 单元位移插值函数矩阵即位移函数矩阵；

$\boldsymbol{q}_e(t)$ —— 单元结点位移向量；

$\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}$ —— 依次为应变、应力向量；

$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ —— 依次为几何矩阵与弹性矩阵。

根据瞬时最小势能原理，系统在外力作用下，满足已知位移边界条件和协调条件的所有各组位移中，真实的一组位移必满足平衡条件并应使总势能的极值，即有变分式

$$\delta\Pi=0 \tag{5-4}$$

而单元总势能 Π_e 为

$$\Pi_e=U_e+V_e \tag{5-5}$$

式中　U_e —— 弹性体应变能；

V_e —— 外载荷势能。

由弹性力学的基本理论，考虑到(5-2)、(5-3)式有

$$U_e=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}\Omega=$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_e^{\mathrm{T}}\left(\iiint_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega\right)\boldsymbol{q}_e \tag{5-6}$$

$$V_e=-\iiint_{\Omega}\overline{\boldsymbol{f}}_e^{\mathrm{T}}y\mathrm{d}\Omega-\iint_{e}\overline{\boldsymbol{P}}_e^{\mathrm{T}}y\mathrm{d}e \tag{5-7}$$

式(5-7)中第一项为体力项，第二项为外激励力项。

式中　$\overline{\boldsymbol{f}}_e$ —— 体力向量；

$\overline{\boldsymbol{P}}_e$ —— 外激励力向量。

而且

$$\overline{\boldsymbol{f}}_e=\boldsymbol{f}_e-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{y}}-\rho\ddot{\boldsymbol{y}} \tag{5-8}$$

式中　$\boldsymbol{f}_e$ —— 单元内力向量；

$\boldsymbol{C}$ —— 阻尼系数；

ρ —— 体积密度；

$\dot{y},\ddot{y}$ —— 依次为速度向量与加速度向量。

将(5-1)、(5-8)式代入(5-7)，考虑到 $\boldsymbol{q}_e$ 仅仅是时间 t 的函数，可得

$$V_e=-\boldsymbol{q}_e^{\mathrm{T}}\left(\iiint_{\Omega}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_e\mathrm{d}\Omega-\iiint_{\Omega}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{q}}_e\mathrm{d}\Omega-\right.$$

$$\iiint_{\Omega} N^{T}\rho N\ddot{q}_e d\Omega) - q_e^{T}\iint_{e} N^{T}\overline{P}_e de \tag{5-9}$$

将(5-9)、(5-6)式代入(5-5)式得单元总势能的表达式：

$$\Pi_e = \frac{1}{2}q_e^{T}K_e q_e + q_e^{T}M_e\ddot{q}_e + q_e^{T}C_e\dot{q}_e - q_e^{T}F_e \tag{5-10}$$

式中 $K_e = \iiint_{\Omega} B^{T}DB d\Omega$

$M_e = \iiint_{\Omega} \rho N^{T}N d\Omega$

$C_e = \iiint_{\Omega} CN^{T}N d\Omega$

$F_e = \iint_{e} N^{T}\overline{P}_e de + \iiint_{\Omega} N^{T}f_e d\Omega$

并依次称 K_e，M_e，C_e，F_e 为单元的刚度矩阵，质量矩阵、阻尼矩阵、结点力向量。

考虑到在瞬时变分情况下：

$$\delta(q_e) = 0, \quad \delta(\ddot{q}_e) = 0 \tag{5-11}$$

而

$$\delta\Pi_e = \delta q_e^{T}\frac{\partial\Pi}{\partial q_e} + \delta\dot{q}_e^{T}\frac{\partial\Pi}{\partial\dot{q}_e} + \delta\ddot{q}_e^{T}\frac{\partial\Pi}{\partial\ddot{q}_e}$$

则由(5-4)式得

$$\delta\Pi_e = \frac{\partial\Pi_e}{\partial q_e} = 0$$

将(5-10)式代入上式得单元的运动方程式：

$$M_e\ddot{q}_e + C_e\dot{q}_e + K_e q_e = F_e \tag{5-12}$$

2. 全结构分析

首先进行坐标变换，通过有限元静力分析中采用的坐标变换矩阵 L 得

$$q_e = L\overline{q}_e \tag{5-13}$$

式中 $\overline{q}_e$—— 在总体坐标下结点位移向量。

将(5-13)式代入(5-10)式得

$$\Pi_e = \frac{1}{2}\overline{q}_e^{T}\overline{K}_e\overline{q}_e + \overline{q}_e^{T}\overline{M}_e\ddot{\overline{q}}_e + \overline{q}_e^{T}\overline{C}_e\dot{\overline{q}}_e - \overline{q}_e^{T}F_e \tag{5-14}$$

通过相同的推导过程可得在总体坐标下单元的运动方程式

$$\overline{M}_e\ddot{\overline{q}}_e + \overline{C}_e\dot{\overline{q}}_e + \overline{K}_e\overline{q} = \overline{F}_e \tag{5-15}$$

式中 $\overline{M}_e = L^{T}M_e L$

$\overline{C}_e = L^{T}C_e L$

$\overline{K}_e = L^{T}K_e L$

$\overline{F}_e = L^{T}F_e$

设全结构具有的单元总数为 E，结点的全部自由度为 N，则全结构的总势能 Π 为

$$\Pi = \sum_{e=1}^{E}\Pi_e = \frac{1}{2}\overline{q}^{T}\left(\sum_{e=1}^{E}\overline{K}_e\right)\overline{q} + \overline{q}^{T}\left(\sum_{e=1}^{E}\overline{M}_e\right)\ddot{\overline{q}} + \overline{q}^{T}\left(\sum_{e=1}^{E}\overline{C}_e\right)\dot{\overline{q}} - \overline{q}^{T}\left(\sum_{e=1}^{E}\overline{F}_e\right) \tag{5-16}$$

式中 $\bar{q}$ 为全结构的结点位移向量，而刚度矩阵、质量矩阵、阻尼矩阵、结点力向量的集合（组装）采用与静力分析相同的办法。故全结构的各系数矩阵可写成

$$M = \sum_{e=1}^{E} \overline{M}_e$$

$$C = \sum_{e=1}^{E} \overline{C}_e$$

$$K = \sum_{e=1}^{E} \overline{K}_e$$

$$F = \sum_{e=1}^{E} \overline{F}_e = \sum_{e=1}^{F} \overline{P}_e$$

此时因为 f_e 对于结构来说是内力，所以在全结构的运动方程中不出现。通过与单元分析相同的方法可导出全结构的运动方程为

$$M\ddot{\bar{q}} + C\dot{\bar{q}} + K\bar{q} = F \tag{5-17}$$

上式表明在有限元素法中，系统的运动方程与多自由度情况相同。因此，用有限元素法进行固有特性分析时，主振型方程也与多自由度情况相同。由(3-59)式至(3-60)式可以看出，系统的主振型方程有 $A\phi = \lambda\phi$ 和 $K\phi = \lambda M\phi$ 两种形式，前者属于标准特征值问题，后者属于广义特征值问题。式中 λ 为特征值，ϕ 为特征向量。因此，飞行器结构固有特性的有限元分析问题显然可以归结为数学上的特征值问题。

四、特征值问题的基本计算方法

主振型方程是一种齐次代数方程。由代数学知，高于四次的方程不存在显解公式。所以主振型方程（特征值方程）的求解必然用到迭代方法。目前存在的各种特征值解法，只是采取的迭代方式和技巧不同而已。当选择解法时，主要取决于所要求特征对的数目、K 和 M 的阶、K 的带宽及 M 是否带状等因素。根据解法用到的基本关系，特征值求解可分为四类。

1. 向量迭代法（也称幂法）

此法用的基本关系式是

$$K\phi_i = \lambda_i M\phi_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

根据迭代格式不同，此法又分为正向迭代、逆迭代以及它们派生出来的移位逆迭代法、瑞雷商迭代法。本书介绍有代表性的逆迭代法。

2. 变换法

此法利用特征向量矩阵 Φ 的基本性质

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda$$

$$\Phi^T M \Phi = I$$

式中 Λ 是由 n 自由度系统 n 个特征值组成的特征值矩阵，即

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

而 Φ 是由各阶特征向量 Φ_i（振型）组成的矩阵

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n]$$

此法分为雅可比(Jacobi)法、广义雅可比法和豪斯霍尔德(Householder)法等。本章介绍具有代表性的广义雅可比法。

3. 多项式迭代法

特征问题 $K\Phi = \lambda M\Phi$ 的特征值 λ 的一个重要性质是，特征值就是下列特征多项式的根

$$p(\lambda) = \det(K - \lambda M)$$

利用特征值 λ 必须使 $p(\lambda) = 0$ 的性质求解 λ 可采用显式多项式迭代法和隐式多项式迭代法。由于计算机的舍入，会引起特征多项式的各系数存在小的误差，在显式多项式迭代法中，这些系数的小误差却会引起多项式的根有很大的误差。因此在通常的分析中，显式地由 K 和 M 算出特征多项式各系数，继而算出要求的特征值是无效的。本章只介绍隐式多项式迭代法。

4. 斯图姆(Sturm)序列法

本方法利用多项式

$$p(\lambda) = \det(K - \lambda M)$$

和

$$p^{(r)}(\lambda^{(r)}) = \det(K^{(r)} - \lambda^{(r)} M^{(r)})$$
$$(r = 1,2,\cdots,n-1)$$

的斯图姆序列性质[2]来求解。其中 $p^{(r)}(\lambda^{(r)})$ 是对应 $K\phi = \lambda M\phi$ 的第 r 个相伴约束问题的特征多项式。

有限元法存在的问题是随着模型单元数的增加和求解精度要求的提高，所要求的计算机容量和计算速度急骤提高。为此，开展了大量的研究工作，这些工作主要集中在两个方面：一方面是寻求快速而有效地求解大型特征值问题的方法。例如，综合利用上述典型方法而发展起来的行列式搜索法、子空间迭代法、兰索斯(Lanczos)法等，都是这一研究的产物；另一方面是将大型问题转化为数个小型问题的集合，例如各种子结构方法。本章重点介绍得到广泛应用的子空间迭代法，并提供相应的计算机程序。

§5.2 逆迭代法

设 K 是正定的，而 M 可以是一个有或没有零对角线元素的对角质量矩阵，也可以是一个带状质量矩阵。若 K 是半正定的，则在迭代之前应当通过移位将它变为正定(见§3.1)

此法的迭代基本格式为：

(1) 假定初始迭代向量 x_1。

(2) 按下列方式依次实施各迭代循环：($k = 1,2,\cdots$)

(a)
$$K\bar{x}_{k+1} = Mx_k \tag{5-18}$$

式中 λ 取 1，它不影响特征向量的收敛。

(b) 将 $\bar{x}_{k+1}$ 对 M 正规化，得下一个迭代向量 x_{k+1}，即

$$x_{k+1} = \frac{\bar{x}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T M \bar{x}_{k+1})^{1/2}} \tag{5-19}$$

(3) 当 x_1 与特征向量 ϕ_1 不对 M 正交时(即 $x_1^T M\phi_1 \neq 0$)，必存在：当 $k \to \infty$ 时，

$$x_{k+1} \to \phi_1$$

按(5-19)式来计算是保证新的迭代向量 x_{k+1} 满足质量正交性关系

$$x_{k+1}^T M x_{k+1} = 1 \tag{5-20}$$

把(5-19)式代入(5-20)式就会出现的确满足此正交性关系。

特征值可用广义特征值瑞雷商求得。由于基本迭代格式(5-18)是从后向前迭代(由 x_k 求 x_{k+1}),故称反迭代法。反之,则称为一般向量迭代法。

用于实际计算中的更有效的计算程序为:

假定:$y_1 = Mx_1$,对 $k = 1,2,\cdots$ 进行如下迭代运算

$$K\bar{x}_{k+1} = y_k$$

$$\bar{y}_{k+1} = M\bar{x}_{k+1}$$

$$\rho(\bar{x}_{k+1}) = \frac{\bar{x}_{k+1}^T y_k}{\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1}}$$

$$y_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{(\bar{x}_{k+1}^T \bar{y}_{k+1})^{1/2}}$$

若所设初始迭代向量满足 $y_1^T\phi_1 \neq 0$,则当 $k \to \infty$ 时有

$$y_{k+1} \to M\phi_1$$

$$\rho(\bar{x}_{k+1}) \to \lambda_1$$

例 5-1 求 $K\phi = \lambda M\phi$ 的 ϕ_1 的近似解

式中

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

解 首先将 K 进行 LDL^T 分解,以便于对(5-18)求解。得

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -1/2 & 1 & & \\ 0 & -2/3 & 1 & \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & & & 0 \\ & 3/2 & & \\ & & 4/3 & \\ 0 & & & 1/4 \end{bmatrix}$$

设初始迭代向量为:$x_1^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$。经验指出,它一般不会与 ϕ_1 正交。

将初始迭代向量代入迭代格式(5-18)得

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

引入 K 的 LDL^T 分解,解得 $\bar{x}_2$ 为

$$\bar{\boldsymbol{x}}_2=\begin{bmatrix}3\\6\\7\\8\end{bmatrix}\qquad \bar{\boldsymbol{x}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}}_2=136$$

计算正规化后的新的迭代向量 $\boldsymbol{x}_2$

$$\boldsymbol{x}_2=\frac{1}{\sqrt{136}}\begin{bmatrix}3\\6\\7\\8\end{bmatrix}$$

按同样方式进行下一个迭代循环，得

$$\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{x}}_3=\begin{bmatrix}0&&&\\&2&0&\\&0&0&\\&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{136}}\\\frac{6}{\sqrt{136}}\\\frac{7}{\sqrt{136}}\\\frac{8}{\sqrt{136}}\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_3=\frac{1}{\sqrt{136}}\begin{bmatrix}20\\40\\48\\56\end{bmatrix}\qquad \bar{\boldsymbol{x}}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}}_3=\frac{6\ 336}{136}$$

$$\boldsymbol{x}_3=\frac{1}{\sqrt{6\ 336}}\begin{bmatrix}20\\40\\48\\56\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.251\\0.503\\0.603\\0.704\end{bmatrix}$$

ϕ_1 的精确解为

$$\begin{bmatrix}0.25\\0.500\\0.602\\0.707\end{bmatrix}$$

显然，仅仅两次迭代，就得到良好的收敛解。

根据迭代法的特性，当迭代向量与欲求的特征向量呈正交关系时，永远也不会收敛到该特征向量。如果我们使所选的迭代向量与已求得的第一特征向量正交，则迭代后将收敛到第二个特征向量。依此可求得其他各特征对。按向量正交原理拟定的依次求各特征对的典型算法有 Gram-Schmidt 法。

§5.3 广义雅可比法

广义雅可比法是一种变换法，它用雅可比矩阵 $\boldsymbol{P}^{(i)}(i=0,1,\cdots)$ 对 $\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}$ 做一系列变换

$$\boldsymbol{K}^{(i+1)}=\boldsymbol{P}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{(i)}\boldsymbol{P}^{(i)} \tag{5-21}$$

$$\boldsymbol{M}^{(i+1)}=\boldsymbol{P}^{(i)\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{(i)}\boldsymbol{P}^{(i)} \tag{5-22}$$

使得当 $i\to\infty$ 时，$\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}$ 化为接近于对角矩阵。若以 l 表示最后的迭代，则 $\boldsymbol{K}^{(l)}=\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}^{(l)}=\boldsymbol{M}$，

[illegible]

而 $K^{(l)}$ 和 $M^{(l)}$ 都是对角矩阵，此时，就可以取第 $(l+1)$ 次迭代结果作为广义特征值问题的近似

[illegible]

$$\left(\frac{\bar{k}^{(k)}}{2}\right)^2 + \bar{k}_{ii}^{(k)}\bar{k}_{jj}^{(k)} > 0 \tag{5-35}$$

因而 χ 总是不为零。另外可以证明 $P^{(k)}$ 是非奇异矩阵(详见参考文献[7]),这确实是算法可用的必要条件。

在执行雅可比法时,一般按行或列依次轮番地将非对角元素化为零。但是为了避免对已经很小的非对角元素做徒劳的计算,可以采用所谓雅可比“过关”法。此法是对于每执行一遍雅可比变换时设置一个“门槛”。例如,对第 m 遍设置“门槛”为 10^{-2m}。我们用 $((k_{ij}^{(k)})^2/k_{ii}^{(k)}k_{jj}^{(k)})^{1/2}$ 和 $((m_{ij}^{(k)})^2/m_{ii}^{(k)}m_{jj}^{(k)})^{1/2}$ 表示第 i 和第 j 自由度之间的偶合因子,那么,对于满足

$$\frac{(k_{ij})^2}{k_{ii}^{(k)}k_{jj}^{(k)}} \leqslant 10^{-2m}, \quad \frac{(m_{ij})^2}{m_{ii}^{(k)}m_{jj}^{(k)}} \leqslant 10^{-2m} \tag{5-36}$$

的非对角元素就算过关了。对于不满足的就再次进行广义雅可比变换。通过将逐次近似的特征值进行比较,并检查所有非对角线元素是否足够小来度量其收敛性,即以 l 表示最后一次迭代. 如果满足下式则是收敛的

$$\frac{\left|\lambda_i^{(l+1)} - \lambda_i^{(l)}\right|}{\lambda_i^{(l+1)}} \leqslant 10^{-s} \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{5-37}$$

其中近似特征值

$$\lambda_i^{(l)} = k_{ii}^{(l)}/m_{ii}^{(l)}, \quad \lambda_i^{(l+1)} = \frac{k_{ii}^{(l+1)}}{m_{ii}^{(l+1)}} \tag{5-38}$$

而且当 $i < j$ 时,对所有的 i, j 有

$$\left[\frac{(k_{ij}^{(l+1)})^2}{k_{ii}^{(l+1)}k_{jj}^{(l+1)}}\right]^{1/2} \leqslant 10^{-s}, \quad \left[\frac{(m_{ij}^{(l+1)})^2}{m_{ii}^{(l+1)}m_{jj}^{(l+1)}}\right]^{1/2} \leqslant 10^{-s} \tag{5-39}$$

其中 10^{-s} 是收敛的容许值。

广义雅可比法的主要步骤如下:

(1) 对每次变换给出一个“门槛”,例如取为 10^{-2m}(对第 m 遍变换);

(2) 对所有 $i < j$ 的元素计算耦合因子,当因子满足(5-36)式则认为过了“门槛”,

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

在这种情形中有一个无限大的特征值。

我们用(5-25)式至(5-32)式来求解。考虑情形(1)中的问题,我们得

$$\bar{k}_{11}^{(1)}=3,\quad \bar{k}_{22}^{(1)}=3,\quad \bar{k}^{(1)}=0$$

$$\chi=3,\quad \gamma=-1,\quad \alpha=1$$

$$\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{(1)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{(1)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 6\end{bmatrix}$$

利用(5-23)、(5-24)式求 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{\phi}$ 并以适当顺序排列矩阵各列可以得到

$$\Lambda=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

现在考虑情形(2)中的问题。这时有

$$\bar{k}_{11}^{(1)}=-2,\quad \bar{k}_{22}^{(1)}=0,\quad \bar{k}^{(1)}=-4$$

$$\chi=-4,\quad \alpha=0,\quad \gamma=-1/2$$

$$\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1/2 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{P}^{(1)T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}3/2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{(1)T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}^{(1)}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

经过与情形(1)中相同的运算可以得到

$$\Lambda=\begin{bmatrix}3/4 & 0\\0 & \infty\end{bmatrix},\quad \phi_1=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-2/(2\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

§5.4 多项式迭代法与斯图姆序列法

一、多项式迭代法

由于特征值方程的解与相应特征多项式的根是同一的,因此我们可由特征多项式直接求特征值。特征多项式方程的一般形式为

$$p(\lambda)=\det(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=0 \tag{5-10}$$

$p(\lambda)$ 的根即为 $\boldsymbol{K}\phi=\lambda\boldsymbol{M}\phi$ 的特征值。

求解(5-40)式一般有显式与隐式两种。显式是将行列式具体展开,即得全部多项式系数,如下式所示

$$p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n=0 \tag{5-41}$$

然后运用各种自动寻根法，解出其根，即为特征值。

由于系数计算上的误差，将引起特征值明显的偏离，故显式很少采用，通常采用隐式方法。

隐式法基本思路是不计算系数，直接计算行列式值。由行列式值发生变号来判定根的位置。直接计算行列式值的方法是将($\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M}$)阵进行如下两种形式之一的分解

$$\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M}=\boldsymbol{LS} \tag{5·42}$$

$$\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M}=\boldsymbol{LDL}^T \tag{5·43}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ —— 单位下三角阵；

$\boldsymbol{D}$ —— 对角阵；

$\boldsymbol{S}$ —— 上三角阵。

实现如上分解后可直接由 $\boldsymbol{S}$ 阵或 $\boldsymbol{D}$ 阵直接得行列式值，即：

$$\det(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=\prod_{i=1}^{n}S_{ii} \tag{5-44}$$

或

$$\det(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})=\prod_{i=1}^{n}d_{ii} \tag{5-45}$$

式中 d_{ii}、S_{ii} 分别为 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{S}$ 对角元素。

由于避免了计算多项式系数，因而使计算精度提高。得到特征值后，可用带移位的反迭代法计算对应的特征向量，移位量等于该特征值。

在隐式多项式迭代中，常用割线法求特征多项式的根。因为 $p(\lambda)$ 是 λ 的 n 次多项式，以变量 λ 为横坐标轴，则 $p(\lambda)$ 在平面上是一 n 次曲线，如图 5-4 所示。该曲线与横坐标轴相交 n 次，有几个零点。

设需求特征值 λ_1，令 μ_{k-1}，μ_k 是 λ_1 的两个近似值。这里

$$\mu_{k-1}<\mu_k\leqslant\lambda_1$$

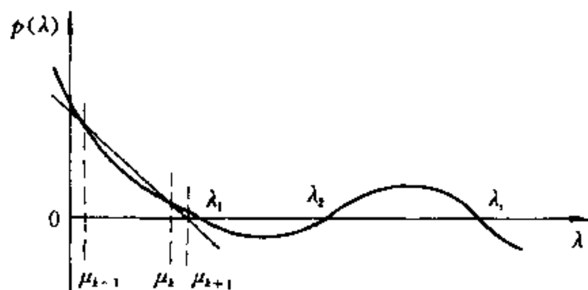


图 5-4 计算 $p(\lambda)$ 的割线迭代

可利用下式进行迭代

$$\mu_{k+1}=\mu_k-\eta\frac{p(\mu_k)}{p(\mu_k)-p(\mu_{k-1})}(\mu_k-\mu_{k-1})$$

式中，μ_k 是第 k 次迭代，$p(\mu_k)$，$p(\mu_{k-1})$ 由(5-44)式或(5-45)式进行计算。而 η 是常数，当 $\eta=1$ 时是标准的割线迭代。当 $\eta\geqslant 2$ 时，将达到加速收敛的目的，故称为加速的割线迭代法。

由于多项式迭代法计算量大，且只能求出特征值。故此法常作为其他方法的一个辅助方法。

二、斯图姆(Sturm)序列法

本方法是利用 Sturm 序列性质来求解的。

1. 特征值分隔性质与 Sturm 序列性质

已知原始特征值问题为 $\boldsymbol{AV}=\lambda\boldsymbol{V}$，相应的约束特征值问题为

$$\boldsymbol{A}^{(m)}\boldsymbol{V}^{(m)}=\lambda^{(m)}\boldsymbol{V}^{(m)} \tag{5-46}$$

式中 $A^{(m)}$ 是通过将 $n \times n$ 的 A 阵抹去最后 m 行与 m 列而得到的矩阵，故 $A^{(m)}$ 为 $(n-m)$ 阶的

对称阵

征值将相邻约束特征值问题(5 - 46)的特征值分离。

即存在

$$\lambda_1^{(m)} \leqslant \lambda_1^{(m+1)} \leqslant \lambda_2^{(m)} \leqslant \lambda_2^{(m+1)} \cdots \leqslant \lambda_{n-m-1}^{(m)} \leqslant \lambda_{n-m-1}^{(m+1)} \leqslant \lambda_{n-m}^{(m)} \qquad (5-17)$$

$$[m = 0, \cdots, (n-2)]$$

主要思路为:先用多项式迭代找到第一特征值的近似值,然后用带移位的向量反迭代,以很少量的迭代次数得到第一特征向量;再应用瑞雷商进一步精确化移位量,得到第一特征值;继之,引入压缩后的特征多项式,消除第一特征值,使第二特征值代替第一特征值地位。重复上面同样的步骤,得到第二特征对,一直到求得全部所需特征对。

一、具体方法

(1) 找到靠近 ω_1^2 的移位量。选择两个初始的移位量 μ_1,μ_2,要求 $\mu_1<\mu_2$ 且均在 ω_1^2 根的左面,这是不难做到的。运用 $\boldsymbol{LDL}^T$ 分解法计算 $p(u)=\det(\boldsymbol{K}-\mu\boldsymbol{M})$,利用加速割线迭代法,求取新的更加接近 ω_1^2 的 μ 值。此迭代格式为

$$\mu_{k+1}=\mu_k+\eta\frac{p(\mu_k)}{p(\mu_k)-p(\mu_{k-1})}(\mu_k-\mu_{k-1}) \tag{5-50}$$

当 $k\to\infty$ 时 $\mu_{k+1}\to\omega_1^2$,如图 5-5 所示。

当 $\eta=1.0$ 时,迭代公式退化为一般的割线法,即牛顿迭代公式。这时收敛速度太慢。

当取 $\eta\geqslant 2.0$ 时称为**加速割线迭代**,可迅速向 ω_1^2 根逼近。为防止 η 取大时跳过多根,可应用 Sturm 序列性质随时进行监视。这样,就可以保证用(5-50)式快速逼近 ω_1^2,得 λ_1 的近似值。

(2) 以此近似值为移位量进行向量反迭代,迅速得到第一特征向量 ϕ_1,继而应用瑞雷商得更加靠近 λ_1 的移位量,最后得到第一特征值 λ_1。

(3) 为了计算下一个特征对,只要将特征多项式中第一特征值因子除掉,得到一个新的压缩后的特征多项式。对此多项式按上法同样处理,即得下一特征对。此压缩多项式的一般形式为

$$p_j(\mu)=p(\mu)\Big/\prod_{i=1}^{j}(\mu-\omega_i^2) \tag{5-51}$$

用此特征多项式显然必可计得第$(j+1)$个特征对。如图 5-6 所示。



图 5-5

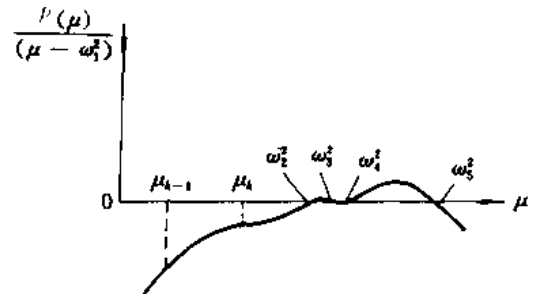


图 5-6

由于此法对每一特征对都是独立求得的,故不存在互相之间误差传递。

二、辅助性措施

要完成以上步骤,还需要一些辅助措施,使这些主要过程得以实现,即:

(1) 在求 λ_1 时,迭代初值取 $\mu_0=0$,而 μ_1 由逆迭代初步确定,确定后用 Sturm 序列性质检查是否丢根。即用三角分解。

$$\bar{K} = K - \mu_1 M = LDL^{T} \tag{5-52}$$

检查 D 中的元素是否全为正，以保证 $\mu_1 < \lambda_1$。若 D 中有 J 个负元素，说明 J 个根被跳过，需要采用新的移位 $\mu_1 = \mu_1/(J+1)$，然后再做上述检查，直到 D 中全部元素为正时终止。在求出 λ_1 后，可采用(5－51)式计算更高的各特征对。式中 j 为已求得的特征值个数。这时的初始迭代值要利用前一个根的多项式迭代的最后四个值，即 $\mu_{k+1}, \mu_k, \mu_{k-1}, \mu_{k-2}$，并根据 μ_{k+1} 和 μ_k 是否大于 λ_j 来确定选取哪两个为新的迭代初值。

确定出初始迭代值后，就可进行多项式迭代。在程序中取 $\eta = 2$，当某一步迭代满足 $|\mu_{k+1} - \mu_k| < 10^{-4}\mu_k$ 时，取 $\eta' = 2\eta$ 进一步加速迭代运算。对每一个 μ_{k+1}，都用 Sturm 序列性质检验它是否已跳过待求的根 λ_{j+1}，一旦发生跳跃则结束多项式迭代，转入向量逆迭代。如在跳跃前出现 $|\mu_{k+1} - \mu_k| < 10^{-5}\mu_k$，也转入向量逆迭代。

(2) 在向量逆迭代中，首先是按多项式迭代中得到的近似值做移轴处理，以保证迅速地迭代出所求的特征对。设需求方程的前 NF 个特征对，则必须确定 NF 个初始迭代向量 $X_1^{(1)}$，$X_2^{(1)} \cdots X_{NF}^{(1)}$，通常采用以下方法确定。

做 M 与 K 的对角元之比，并按降序排列，取其中的前 $(NF-1)$ 个，设为：m_{i2i2}/k_{i2i2}，$m_{i3i3}/k_{i3i3}, \cdots, m_{iNFiNF}/k_{iNFiNF}$

取

$$X_1^{(1)} = [1,1,\cdots,1]^{T}$$

$$X_2^{(1)} = [\underbrace{1,1,\cdots,-1}_{i2},1,\cdots,1]^{T}$$

$$X_{NF}^{(1)}[\underbrace{1,1,\cdots,-1}_{iNF},1,\cdots,1]^{T}$$

对于一个重根 λ_i，设其重数为 r，对结构而言，一般有 $r \leqslant 6$，应有 r 个相互关于 M 正交的特征向量，为了在重根处用逆迭代计算全部 r 个向量，就必须采用格莱姆-施密特(Gram－Schmidt)正交化。然而在迭代前不能事先知道是否有重特征根，于是，对第 i 个特征值 $(i>1)$ 迭代时，初始迭代向量 $X_i^{(1)}$ 和逆迭代过程中的每一个新向量 $X_i^{(k)}$ 都要正交化处理，这样才能保证出现重根时不会收敛于前面已求得的特征向量。为了最大限度地减小运算量，根据 $r \leqslant 6$，最多只用前面的最后六个向量去做新向量的正交化处理。

(3) 由于本方法中要对本是正定的 K 做移轴处理，使 $\bar{K} = K - \mu M$ 不一定是正定的，此时会出现对 $\bar{K}$ 的三角分解无法进行的情况。为此可稍微改变 μ 值，例如取 0.99μ 代替 μ，直到三角分解可进行为止。

三、计算机流程示意图

在下述流程图中，RCBTOL 表示求最小根下界对向量逆迭代的误差限，也是多项式迭代中的误差限。而 RQTOL 则表示向量逆迭代求各特征根时的误差限。故 $(|\mu_{k+1} - \mu_k|/\mu_k) \leqslant$ RCBTOL 时停止多项式迭代，转入向量逆迭代。$(|\mu_{k+1} - \mu_k|/\mu_k) \leqslant$ RQTOL，则 μ_{k+1} 就是所求特征值。具体流程示意如下：

$i = 1,2,\cdots,\mathrm{NF}$

$k = 1,2,\cdots,\mathrm{NITEM}$

对多项式 $p_{i-1}(\lambda) = \dfrac{p(\lambda)}{\prod_{j=1}^{i-1}(\lambda - \lambda_j)}$ 做迭代：

$$\mu_{k+1} = \mu_k - \eta \frac{p_{i-1}(\mu_k)}{p_{i-1}(\mu_k) - p_{i-1}(\mu_{k-1})}(\mu_k - \mu_{k-1})$$

当出现跳根时，或满足 RCBTOL 判据时，转出 k 的循环。

CONTINUE

$\mu = \mu_{k+1}$

形成初始向量 $\boldsymbol{X}^{(1)}$

$\overline{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} - \mu\boldsymbol{M}$（移轴）

$k = 1,2,\cdots,\mathrm{NITEM}$（向量逆迭代）

$\overline{\boldsymbol{K}}\overline{\boldsymbol{X}}^{(k)} = \boldsymbol{Y}^{(k-1)}$

$\overline{\boldsymbol{Y}}^{(k)} = \boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{X}}^{(k)}$

$$\lambda_i^{(k)} = \frac{\overline{\boldsymbol{X}}^{T(k)}\boldsymbol{Y}^{(k-1)}}{\overline{\boldsymbol{X}}^{T(k)}\overline{\boldsymbol{Y}}^{(k)}}$$

$$\boldsymbol{Y}^{(k)} = \frac{\overline{\boldsymbol{Y}}^{(k)} - \sum_{j=1}^{i} a_{i-j}\overline{\boldsymbol{\Phi}}_{i-j}}{(\overline{\boldsymbol{X}}^{(k)}\overline{\boldsymbol{Y}}^{(k)})^{1/2}}$$

§5.6　子空间迭代法

本法也是特征值问题的综合解法，它综合了向量反迭代、Sturm 序列及瑞雷-李兹分析原理。它也是直接对广义特征值求解，无需实施特征值问题的标准化过程。和行列式搜索法一样，它也是以求前 p 个特征对为目的的。本法的主要步骤为：

(1) 建立 q 个初始迭代向量，要求 $q > p$。

(2) 对 q 个向量进行同时向量反迭代，并利用瑞雷-李兹分析原理，从 q 个迭代向量中抽取满足精度要求的特征值与特征向量。

(3) 迭代收敛后，应用 Sturm 序列校核，以证实所求无误。

其具体做法为：

用 q 个初始迭代向量按列排列构成 X_1 矩阵，作为初始向量矩阵。然后以下列迭代格式，实施同时向量反迭代：

$$\boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_k \qquad (k = 1,2,\cdots) \tag{5-53}$$

注意：式中 $\boldsymbol{X}, \overline{\boldsymbol{X}}$ 均为矩阵，而非向量。

(5-53) 式完成了由向量空间 E_k 到 E_{k+1} 的迭代。

求算子 $\boldsymbol{K}$ 及 $\boldsymbol{M}$ 在 E_{k+1} 上的投影：

$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1} \tag{5-54}$$

$$\boldsymbol{M}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1} \tag{5-55}$$

对于投影算子 $\boldsymbol{K}_{k+1}, \boldsymbol{M}_{k+1}$ 所构成的新特征值系统求解：

$$\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1} = \boldsymbol{M}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{\Omega}_{k+1}^2 \tag{5-56}$$

式中　$\boldsymbol{Q}_{k+1}$ —— 新特征值系统的特征向量矩阵；

　　　$\boldsymbol{\Omega}_{k+1}^2$ —— 对应的特征值对角阵。

得到特征向量的一个新的迭代向量矩阵 $\boldsymbol{X}_{k+1}$

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1} = \overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1} \tag{5-57}$$

可以证明，此 $\boldsymbol{X}_{k+1}$ 对 $\boldsymbol{M}$ 是正交的，因为

$$\boldsymbol{Q}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}\boldsymbol{Q}_{k+1} = \boldsymbol{X}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{I}。$$

如果初始子空间 $\boldsymbol{X}_1$ 不与任一个所要求的特征向量正交，则随着迭代次数 $k \to \infty$ 将有

$$\boldsymbol{\Omega}_{k+1}^2 \to \boldsymbol{\Omega}^2 \qquad \boldsymbol{X}_{k+1} \to \boldsymbol{\Phi} \tag{5-58}$$

得到所要求的特征值与特征向量。

在一般向量反迭代法中，在(5-53)式所得 $\overline{\boldsymbol{X}}_{k+1}$ 式基础上实施正规化，就可以转为新的迭代向量矩阵 $\boldsymbol{X}_{k+1}$。但本法必须经过(5-54)～(5-57)式整个过程才能得到新的迭代向量矩阵 $\boldsymbol{X}_{k+1}$，这是由于这里的迭代量已不是一个向量，而是一个向量集合，即 $\boldsymbol{X}_k$ 矩阵。根据幂法原理，$\boldsymbol{X}_k$ 的各列向量在迭代后必定都向最低的特征向量逼近，因此在迭代向量集合中各向量将愈来愈平行。这样，就不可能实现同时收敛到所要求的各特征向量。为此必须采取正交化措施。(5-54)、(5-55)式的目的在于将 $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}$ 由原始的 $n \times n$ 阶降为与子空间相适应的 $q \times q$ 阶。(5-56)式是采用前述各法之一来求解 $q \times q$ 阶广义特征问题的。这样求得的辅助特征向量阵 $\boldsymbol{Q}_{k+1}$，它的各列向量必为正交的。通过(5-57)式再将($q \times q$)阶向量变回到 $n \times q$ 阶，并使之正交化，得

到新的迭代向量 X_{k+1}。

迭代收敛情况可用瑞雷-李兹分析原理进行判别:特征值愈低,近似的程度愈好。对迭代的特征值结果,可用 Sturm 序列检查它在规定的区间特征值数目是否正确。

此法的运算次数主要取决于初始迭代子空间 X_1 的选取及特征对的精度要求。为此,可使初始迭代子空间尽量靠近真实特征向量解。已有的实验数据、相近结构的相应振型等都可供选择时参考。由于此法将 n 维空间问题降为 q 维子空间,因而使计算大大简化。

例 5-3 研究特征值问题 $\boldsymbol{K\phi} = \lambda \boldsymbol{M\phi}$,求前两阶特征对,其中

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

选取初始迭代向量矩阵 $\boldsymbol{X}_1$:

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

代入 $\boldsymbol{K\overline{X}}_2 = \boldsymbol{MX}_1$,解得 $\overline{\boldsymbol{X}}_2$:

$$\overline{\boldsymbol{X}}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

由(5-54)、(5-55)式有:

$$\boldsymbol{K}_2 = \overline{\boldsymbol{X}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\overline{\boldsymbol{X}}_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \overline{\boldsymbol{X}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{X}}_2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

由(5-56)式有:

$$\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{\Omega}_2^2$$

解此特征值问题得

$$\boldsymbol{\Omega}_2^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \end{bmatrix}$$

由(5-57)式得

$$\boldsymbol{X}_2 = \overline{\boldsymbol{X}}_2\boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

精确解为

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

显然，一次迭代就迅速逼近了精确值。还可以看出，此法使三阶特征值问题降为了二阶特征值问题。

子空间迭代法的计算机程序见附录。

在实际程序实现时，为减少运算量和存储，通常采用如下步骤：

(1) 形成初始迭代矩阵　$X_1 = Y_1$

(2) 分解总体刚度矩阵　$K = LDL^{\mathrm{T}}$

(3) 用下列子空间迭代产生进一步的迭代矩阵 Y_{k+1}。

(a) 解 $K\overline{X}_{k+1} = Y_k$，求出 $\overline{X}_{k+1}$。采用的解法是用高斯消去法。

(b) 用 $\overline{X}_{k+1}$ 计算 $K_{k+1} = \overline{X}_{k+1}^{\mathrm{T}} Y_k$

(c) 计算 $\overline{Y}_{k+1} = M\overline{X}_{k+1}$ 和 $M_{k+1} = \overline{X}_{k+1}^{\mathrm{T}} \overline{Y}_{k+1}$

(d) 计算减小系统的特征对。即求解

$$K_{k+1}\Phi_{k+1} = M_{k+1}\Phi_{k+1}\Lambda_{k+1}$$

得减小系统的特征值矩阵 Λ_{k+1} 和特征向量矩阵 Φ_{k+1}，而采用的解法则是广义雅可比方法。

(e) 生成进一步的迭代矩阵 Y_{k+1}

$$Y_{k+1} = \overline{Y}_{k+1}\Phi_{k+1}$$

(f) 计算相邻两次迭代所得特征值 $\lambda_i^{(k)}$ 和 $\lambda_i^{(k+1)}$，当 $(|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|/\lambda_i^{(k+1)}) \leqslant \mathrm{tol}$ 时，就认为满足收敛了。tol 为 10^{-2s}，$2s$ 为特征值精度指标。否则返回步骤(2)。

在完成第(1)步的运算中，初始迭代向量的选取好坏，直接影响迭代的次数和结果的精度。如果待求的特征对数目为 p，为了得到更好的收敛性，可以把子空间实际采用的迭代向量维数取得比 p 稍大一些，通常取迭代向量维数 q 为：

$$q = \min(2p, p + 8)$$

在程序中初始迭代矩阵 Y_1 是这样选配的。取总质量矩阵 M 的对角线元素 m_{ii} 作为 Y_1 的第一列（或取第一列均为 1），然后将 M 的全部对角元与总刚度矩阵 K 中对应的全部对角元做比值 m_{ii}/k_{ii}，并从大到小按降序排列。将元素 m_{ii}/k_{ii} 用 1 代替形成一列单位向量 e_i，从而构成 Y_0。设第 r 列为

$$e_i = [D\cdots 010 \cdots]^{\mathrm{T}}$$

第 i 位

则矩阵 Y_0 的第 $r+1$ 列便取为 e_i。也就是说，单位向量中 1 所在的行位各不相同，“1”选在 m_{ii}/k_{ii} 相对较大的行位上。例如我们假设

$$K = \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ \times & 2 & & & \\ \times & \times & 1 & & \\ \times & \times & \times & 4 & \\ \times & \times & \times & \times & 4 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 3 & & & & \\ \times & 14 & & & \\ \times & \times & 3 & & \\ \times & \times & \times & 24 & \\ \times & \times & \times & \times & 12 \end{bmatrix}$$

则

$$\text{diag}(m_{ii}/k_{ii}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 7 & & & \\ 0 & 0 & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{行序 } i \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{matrix}$$

列序 r(按对角元大小次序)　　5　1　3　2　4，

于是 Y_0 取为

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上式中，矩阵 Y_1 的最后两列是可以交换的，因为它们对应的矩阵 $\text{diag}(m_{ii}/k_{ii})$ 对角元素的值是相等的。

在程序中的迭代过程是按实用方法完成的，其流程示意如下：

1）建立初始迭代矢量　$X_1 = Y_1$

2）分解刚度阵　$K = LDL^T$

3）迭代

$$\left[\begin{array}{l} k = 1,2,\cdots,\text{NITEM} \\ LDL^T\overline{X}_{k+1} = Y_k \\ K_{k+1} = \overline{X}_{k+1}^T Y_k \\ \overline{Y}_{k+1} = M\overline{X}_{k+1} \\ M_{k+1} = \overline{X}_{k+1}^T \overline{Y}_{k+1} \\ K_{k+1}Q_{k+1} = M_{k+1}Q_{k+1}\Lambda_{k+1} \\ Y_{k+1} = \overline{Y}_{k+1}Q_{k+1} \\ \text{当}\dfrac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leqslant \text{tol 时，转出循环} \\ \text{CONTINUE} \end{array}\right.$$

4）计算各 λ_i 值的误差范围

5）用 sturm 序列检查是否丢根。

关于用 sturm 序列检查是否丢根的问题，采用如下方法：

假设经过第 l 次迭代后已收敛到所要求的精度，得到特征值 $\lambda_1^{(l)},\lambda_2^{(l)},\cdots,\lambda_q^{(l)}$ 共 q 个。此时可认为所求的特征值近似值在下式给出的邻域内，即

$$0.99\lambda_i^{(l)} < \lambda_i < 1.01\lambda_i^{(l)}$$

由此可确定出所有特征值的上界 μ(移位值)，然后对 $K - \mu M$ 做三角分解，即

$$K - \mu M = LDL^T$$

显然，对角阵 D 中负元素的个数 N，即是比 μ 小的特征值实际应有的个数。由 N 是否等于 q 就

可检查出此问题的计算是否发生丢根情况。

习　题

5-1　某系统的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$、刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 如下，试用广义雅可比法程序计算此系统的全部固有圆频率和主振型。

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}10 & 2 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 12 & 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 11 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 9 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 15\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}12 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 14 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 16 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 12 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 11\end{bmatrix}$$

答：　固有圆频率是：

$\omega_1=0.657\,865$　$\omega_2=0.814\,655$　$\omega_3=0.971\,524$　$\omega_4=1.053\,226$　$\omega_5=1.221\,619$

对应的五阶主振型依次是：

$\phi^{(1)}$	$\phi^{(2)}$	$\phi^{(3)}$	$\phi^{(4)}$	$\phi^{(5)}$
0.134 906	0.082 919 8	−0.191 710	0.142 012	−0.076 387
−0.061 294 7	0.153 148	0.158 991	0.142 420	0.017 098
−0.157 903	−0.118 604	−0.074 839	0.120 998	−0.066 665
0.109 466	−0.182 813	0.137 469	0.125 531	0.086 048
−0.041 473	0.003 561 7	−0.088 978	0.007 692	0.289 133

5-2　已知：有一振动系统，其刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分别为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ & 2 & -1 & 0\\ & \text{对称} & 2 & -1\\ & & & 2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1.5 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0\\ & & 1 & 0\\ & & & 1.5\end{bmatrix}$$

计算特征值问题 $\boldsymbol{K}\phi=\lambda\boldsymbol{M}\phi$ 的前三对特征对，采用子空间迭代法程序，按照进行 sturm 序列检验和不进行 sturm 序列检验两种算法计算。

答：　计算的特征值依次是：

0.333 333E+00；　0.100 000E+01；　0.200 000E+01

计算的特征值是：

$\phi^{(1)}$	$\phi^{(2)}$	$\phi^{(3)}$
0.365 148D+00	0.534 523D+00	0.447 214D+00
0.547 723D+00	0.267 261D+00	−0.447 214D+00
0.547 723D+00	−0.267 261D+00	−0.447 214D+00
0.365 148D+00	−0.534 523D+00	0.447 214D+00

5-3　某反坦克导弹弹翼为矩形，展向长 0.15 m，弦向长 0.03 m，等厚度，厚 0.004 m。材料为铝合金 LC9，翼根按完全固定，试用有限元素法计算弹翼的前十阶固有频率与振型，并用矩形薄板的横向振动理论解与之对比。分析中假定翼面做纯弯曲振动。

第六章　传递矩阵法

§6.1　基本理论与方法

由于当代飞行器特别是导弹长细比多在10以上，弹翼和尾翼多为小展弦比，弹身纵向和扭转振动的固有频率比较高，结构动力学分析感兴趣的是它的低阶弯曲振动模态，因此，很多情况下可把弹体简化成变截面的伯努利梁，翼面和弹内设备视为固定在梁上的质点，形成一种链式模型。传递矩阵法是求解此类模型固有特性的有效方法。它的计算规模不像有限元素法那样随模型自由度数增加而剧增。此法比较简便，易于掌握，便于编制计算机程序，对计算机容量要求不高。

一、分析模型

此方法通常采用具有集中质量的离散系统模型和具有分布质量的连续系统模型。

拟定集中质量的离散系统模型时，人为地将飞行器划分为若干段，各段质量可全部集中到该段(包括内部装载)质心上，也可再转换成该段两端的等效质量，形成一连串的集中质量点各质点之间用无质量的等刚度弹性元件(梁或弹簧)连接。质量点的数量、位置及质量大小应保证全弹及各舱段质量、质心不变，而各弹性元件则应反映对应段结构的刚度及传力特性，尽可能使全弹的刚度及其分布状况不变。也可以将弹翼、位置明显偏离舱段轴线的内部装载、晃动质量(如液体燃料)，以及并联的或摆动的发动机等处理为模型的分支系统(图6-1)，还可以按参考文献[14]的11.3节方法处理。

二、基本原理

拟定了分析模型后，将弹性元件与质量点分别按相同方向依次编号。号数相同的质量点与弹性元件构成一个典型段(图6-2)。显然，系统振动时，各弹性元件与相连质量点的连接边界都有各自的物理状态。描述连接边界上物理状态的列向量称为该界面的状态向量，它由该界面的广义内力及其对应的位移组成，并用$\mathbf{Z}$表示。质量i左右的状态向量依次用Z_i^L，Z_i^R表示。显然梁做弯曲振动时，任一剖面的状态向量为

$$\mathbf{Z}=[y\quad \theta\quad M\quad Q]^{\mathrm{T}} \tag{6-1}$$

式中　y——挠度；

θ——转角；

M——弯矩；

Q——剪力。

现以弹性元件为梁的平面弯曲振动为例，介绍传递矩阵的概念。状态向量中各元素的正负号与材料力学的符号规定相同。图6-2中所示诸内力均为正向。现拿第n个典型段来研究。

若取第 n 号弹性元件为分离体，通过动力平衡条件与变形协调条件，可以建立它两端状态向量之间的关系。若是线性系统，该关系可写成

$$Z_n^L = F_n Z_{n-1}^R \tag{6-2}$$

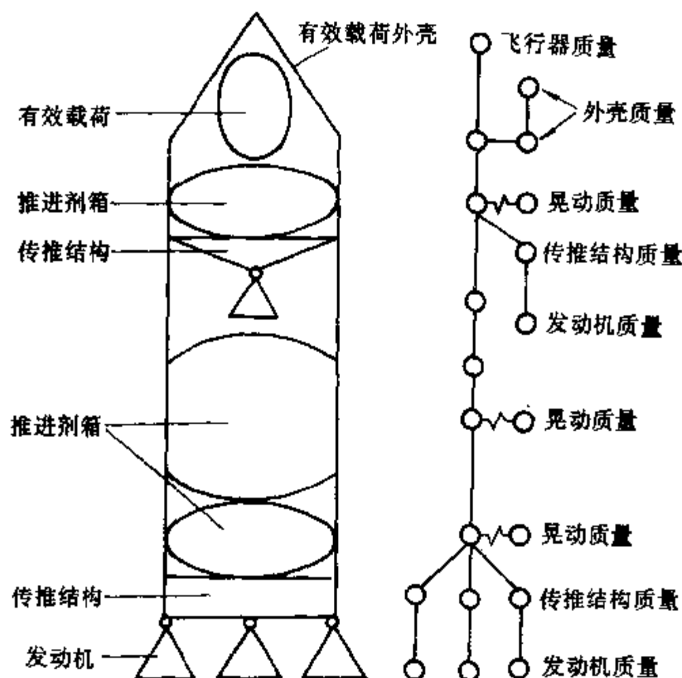


图 6-1　传递矩阵法的导弹模型简图

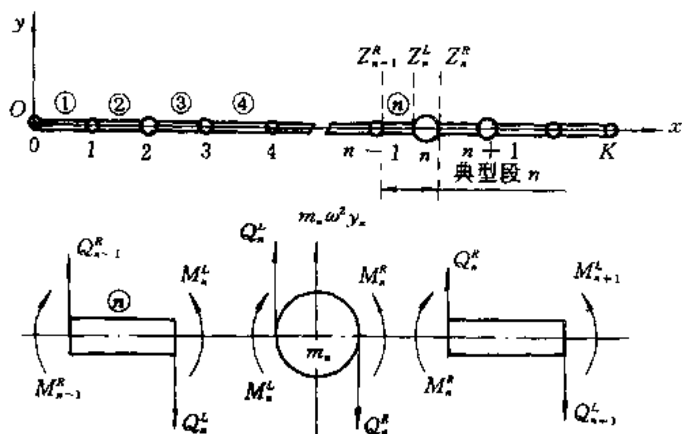


图 6-2　典型段示意图

式中矩阵 F_n 确定了第 n 号弹性元件两端状态向量之间的关系。即通过它可由 $n-1$ 号点的状态向量 Z_{n-1}^R 得到其后的 n 号点状态向量 Z_n^L，我们称 F_n 为场传递矩阵，简称场阵。梁弯曲振动时，场阵为

$$F_n = \begin{bmatrix} 1 & l_n & \dfrac{l_n^2}{2E_nJ_n} & \dfrac{l_n^3}{6E_nJ_n} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_n}{E_nJ_n} & \dfrac{l_n^2}{2E_nJ_n} \\ 0 & 0 & 1 & l_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-3}$$

式中　E_nJ_n —— 第 n 号等直梁的刚度；

l—— 梁总长，且没有考虑质量，如图 6－3 所示。

同理，也可找到第 n 号质量点两边状态向量之间的传递关系，即

$$Z_n^R = P_nZ_n^L \tag{6-4}$$

式中矩阵 P_n 确定了质点 n 两端状态向量之间的传递关系，称为点传递矩阵，简称点阵。假定质点质量为 m，它没有长度，只产生横向振动，并忽略其转动惯量，可导出点阵为

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega^2m & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6-5}$$

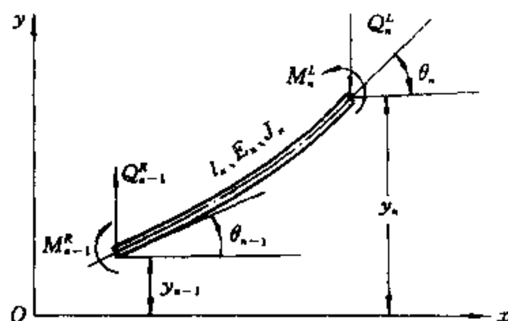


图 6－3　梁的弹性变形

将(6－2) 式代入(6－4) 式后可得

$$Z_n^R = P_nF_nZ_{n-1}^R = T_nZ_{n-1}^R \tag{6-6}$$

(6－5) 式中 ω 为系统圆频率。矩阵 T_n 建立了第 $n-1$ 号典型段右端面状态向量与第 n 号典型段右端面状态向量之间的关系，叫做第 n 号典型段的传递矩阵。由(6－6) 式知

$$T_n = P_nF_n \tag{6-7}$$

将(6－3)、(6－5) 式代入(6－7) 式得

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & l_n & \dfrac{l_n^2}{2E_nJ_n} & \dfrac{l_n^3}{6E_nJ_n} \\ 0 & 1 & \dfrac{l_n}{E_nJ_n} & \dfrac{l_n^2}{2E_nJ_n} \\ 0 & 0 & 1 & l_n \\ m\omega^2 & ml_n\omega^2 & \dfrac{ml_n^2\omega^2}{2E_nJ_n} & 1+\dfrac{ml_n^3\omega^2}{6E_nJ_n} \end{bmatrix} \tag{6-8}$$

由上式可见，传递矩阵是 ω 的函数，而且它只与本典型段的尺寸、材料、质量状况有关。

对于图 6－2 所示模型，其他的典型段都可以建立起与(6－6) 式同样形式的关系式。于是，可以依次列出整个系统各典型段的关系式

$$Z_K^R = T_KZ_{K-1}^R$$

$$Z_{K-1}^R = T_{K-1}Z_{K-2}^R$$

$$\cdots\cdots$$

$$Z_2^R = T_2Z_1^R$$

$$Z_1^R = T_1 Z_0^R \tag{6-9}$$

从而导出

$$Z_K^R = T_K T_{K-1} T_{K-2} \cdots T_2 T_1 Z_0^K = T Z_0^R \tag{6-10}$$

式中　T—— 系统的总传递矩阵。并且

$$T = T_K T_{K-1} T_{K-2} \cdots T_2 T_1 \tag{6-11}$$

总传递矩阵 T 给出了分析模型两端状态向量之间的传递关系。传递矩阵法就是通过将结构的边界条件引入(6-10)式来求解固有频率与主振型的。

由(6-8)式知，传递矩阵是 ω 的函数，对本例讲，各传递矩阵是 4×4 阶的。由(6-11)式则知总传递矩阵 T 也是 ω 的函数，而且也是 4×4 阶的，故(6-10)式可写成下面形式

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_K^R = \begin{bmatrix} t_{11}(\omega) & t_{12}(\omega) & t_{13}(\omega) & t_{14}(\omega) \\ t_{21}(\omega) & t_{22}(\omega) & t_{23}(\omega) & t_{24}(\omega) \\ t_{31}(\omega) & t_{32}(\omega) & t_{33}(\omega) & t_{34}(\omega) \\ t_{41}(\omega) & t_{42}(\omega) & t_{43}(\omega) & t_{44}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0^R \tag{6-12}$$

这时，只需将边界条件引入上式，即可得到频率方程。对于梁的问题，一般边界条件是：

简支：　$y=0$，　$M=0$

自由：　$M=0$，　$Q=0$

固定：　$y=0$，　$\theta=0$

现仍以图 6-2 所示分析模型为例。因为它的两端为自由端，即为自由-自由状态，只需在(6-11)式中乘以零号质量点的点阵 P_0 即可得到此系统的传递矩阵 T，且(6-12)式的形式变成：

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_K^R = \begin{bmatrix} t_{11}' & t_{12}' & t_{13}' & t_{14}' \\ t_{21}' & t_{22}' & t_{23}' & t_{24}' \\ t_{31}' & t_{32}' & t_{33}' & t_{34}' \\ t_{41}' & t_{42}' & t_{43}' & t_{44}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_0^T \tag{6-13}$$

而边界条件是

$$\begin{cases} M_0^L = Q_0^L = 0 \\ M_k^R = Q_k^R = 0 \end{cases}$$

将此边界条件代入(6-13)式可得

$$\begin{bmatrix} t_{31}'(\omega) & t_{32}'(\omega) \\ t_{41}'(\omega) & t_{42}'(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_0^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6-14}$$

上式有非零解的条件是

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} t_{31}'(\omega) & t_{32}'(\omega) \\ t_{41}'(\omega) & t_{42}'(\omega) \end{vmatrix} = 0 \tag{6-15}$$

(6-15)式叫做频率方程。在设计计算中，常用数值解法求解此方程。例如假定一系列 ω 值，代入(6-15)式算出对应的一系列 Δ 值，从中找出能使 Δ 趋近于零且满足规定的精度要求的 ω 值，此值即为所求的固有圆频率。如果把 Δ 与 ω 画成曲线

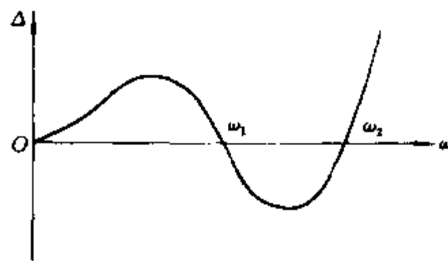


图 6-4　频率方程曲线

(图 6-4)，该曲线与水平轴 ω 相交处的数值就是各阶的固有圆频率。

在求各阶相应的主振型时，(6-15)式中各元素均为已知(ω 已知)。此时，将求出的 ω 代入(6-14)式，可求出 y_0^L，θ_0^L 的关系式

$$\theta_0^L = -\frac{t_{31}'}{t_{32}'} y_0^L$$

对于正规化振型可得

$$\left.\begin{aligned} y_0^R &= y_0^L = 1 \\ \theta_0^R &= \theta_0^L = -\frac{t_{31}'}{t_{32}'} \end{aligned}\right\} \tag{6-16}$$

这就确定了第 0 号质点的主振型数值及状态向量 $\boldsymbol{Z}_0^L$，而 $\boldsymbol{Z}_0^R = \boldsymbol{P}_0 \boldsymbol{Z}_0^L$，然后利用(6-9)式的递推关系，即可得到整个系统各质点的状态向量，从各状态向量中抽出广义位移 y，即得到对应于已知固有频率 ω 的主振型。

从上述讨论可见，传递矩阵把状态向量从一个位置转移到另一个位置。状态向量一定，传递矩阵的规模(阶次)也随之确定，故计算规模不因质量点数的增加而剧增。传递矩阵法的一般步骤如下：

(1) 拟定分析模型，给各质量点与弹性元件编号，确定坐标系和状态向量；

(2) 推导各典型段的点阵与场阵，以建立各段状态向量间传递矩阵，推导方法见参考文献[15]；

(3) 由(6-11)式建立总传递矩阵；

(4) 引入边界条件，建立频率方程；

(5) 解频率方程求出固有频率；

(6) 利用求出的固有频率及传递矩阵，求正规化的主振型。

三、分支系统

对于有分支的系统(如图 6-5 所示)，可首先从各分支的最外端开始，导出各分支中的传递矩阵，直到与主系统相接的界面为止。例如图 6-5 中与 i 质点有连接界面的分支系统，可先求出其最外端的状态向量 $\boldsymbol{Z}_A$ 到与 i 点连接界面的状态向量 $\boldsymbol{Z}_B$ 之间的传递矩阵 $\boldsymbol{T}_{BA}$，再进而推导出具有分支的 i 点的新的点阵。i 质量点就以此新的点阵参加主系统的传递。这样处理的结果是将有分支的系统化成无分支的等效系统，只要对此等效系统用传递矩阵法分析就可以求出有分支系统的固有特性。

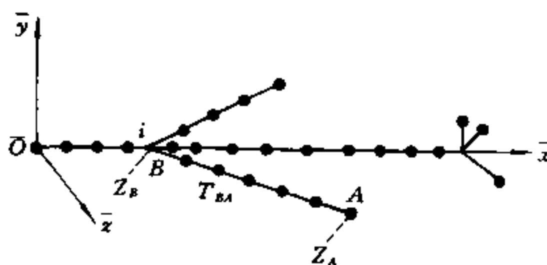


图 6-5　分支系统

具有弹簧支承的梁可作有分支的系统的最简单例子。假设不计弹簧质量，其刚度为 k_i，与

$$\begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_i^R = \begin{bmatrix} I & O \\ K_i & I \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_i^L \tag{6-17}$$

或

$$Z_i^R = P_i Z_i^L \tag{6-18}$$

式中 Z_d,Z_f 分别为状态向量 Z 中的广义位移分量与广义力分量,而且 i 点的点阵

$$P_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_i & I \end{bmatrix} \tag{6-19}$$

其中 I —— 单位矩阵(2 阶);

0 —— 零矩阵(2 阶);

K_i—— 连在 i 点的分支系统刚度矩阵。

此处

$$K_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_i & 0 \end{bmatrix}$$

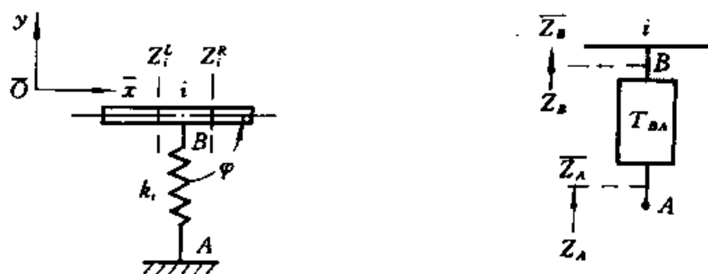


图 6-6 局部弹性支承

将任意的分支系统等效成弹性支承系统,其动态特性用刚度矩阵 K 表示。只要找到 K 的表达式,利用(6-19)式就可以确定带有分支系统的质点 i 的点阵,并由(6-17)式参加主系统的传递。这样做的基本思想就是通过 K 把分支系统的特性吸收到主系统中。

推导分支系统的刚度矩阵 K,是通过分支系统的传递矩阵 T_{BA} 进行的。具体方法如下:

分支系统的传递方程式为

$$Z_B = T_{BA} Z_A \tag{6-20}$$

或者

$$\begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}_{BA} \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_A \tag{6-21}$$

由于 Z_B 是用分支系统坐标表示的,将它转换成主系统坐标系后用 $\overline{Z}_B$ 表示,并用 G 表示坐标转换矩阵,故

$$\overline{Z}_B = G Z_B \tag{6-22}$$

或

$$\begin{bmatrix} \overline{Z}_d \\ \overline{Z}_f \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} g_d & 0 \\ 0 & g_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_B \tag{6-23}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} g_d & 0 \\ 0 & g_f \end{bmatrix} \tag{6-21}$$

利用(6-20)、(6-22)式可得

$$\overline{Z}_B = GT_{BA}Z_A = T^*_{BA}Z_A \tag{6-25}$$

或者

$$\begin{bmatrix} \overline{Z}_d \\ \overline{Z}_f \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} g_d t_{11} & g_d t_{12} \\ g_f t_{21} & g_f t_{22} \end{bmatrix}_{BA} \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} t^*_{11} & t^*_{12} \\ t^*_{21} & t^*_{22} \end{bmatrix}_{BA} \begin{bmatrix} Z_d \\ Z_f \end{bmatrix}_A \tag{6-26}$$

而且

$$T^*_{BA} = \begin{bmatrix} g_d t_{11} & g_d t_{12} \\ g_f t_{21} & g_f t_{22} \end{bmatrix}_{BA} = \begin{bmatrix} t^*_{11} & t^*_{12} \\ t^*_{21} & t^*_{22} \end{bmatrix}_{BA} \tag{6-27}$$

T^*_{BA} 是用主系统坐标表示的分支系统的传递矩阵。当分支系统起点 A 处的边界条件给定后，A 处状态向量中只有一半元素未知。设这些未知量用列向量 Z_{rA} 表示，则由(6-26)式得下面一组式子

$$\overline{Z}_{dB} = t^*_d Z_{rA} \tag{6-28}$$

$$\overline{Z}_{fB} = t^*_f Z_{rA} \tag{6-29}$$

t^*_d，t^*_f 是 T^*_{BA} 中与 Z_{rA} 对应的矩阵块。由式(6-28)知

$$Z_{rA} = t^{*\,-1}_d \overline{Z}_{dB} \tag{6-30}$$

将(6-30)式代入(6-29)式得

$$\overline{Z}_{fB} = t^*_f t^{*\,-1}_d \overline{Z}_{dB} \tag{6-31}$$

由 i 点的平衡条件与连续条件有

$$\overline{Z}^R_{fi} = \overline{Z}^L_{fi} + \overline{Z}_{fB} \tag{6-32}$$

$$\overline{Z}^L_{di} = Z^T_{di} = \overline{Z}_{dB} \tag{6-33}$$

将(6-31)式代入(6-32)式并考虑到(6-33)式则可导出

$$\overline{Z}^R_{fi} = \overline{Z}^L_{fi} + t^*_f t^{*\,-1}_d \overline{Z}^L_{di} \tag{6-34}$$

联立(6-33)、(6-34)式，写成矩阵表达式

$$\begin{bmatrix} \overline{Z}_d \\ \overline{Z}_f \end{bmatrix}^R_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ t^*_f t^{*\,-1}_d & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Z}_d \\ \overline{Z}_f \end{bmatrix}^L_i \tag{6-35}$$

比较(6-17)、(6-35)式，刚度矩阵 K 可按下式给出

$$K = t^*_f t^{*\,-1}_d \tag{6-36}$$

若同一点有 m 个分支系统组合时，求出各分支的刚度矩阵 $K_1, K_2, \cdots, K_m$，即得

$$K = \sum_{j=1}^{m} K_j \tag{6-37}$$

四、方法的特点

用传递矩阵法进行振动分析时，只需要对一些阶次很低的传递矩阵进行连续的矩阵乘法运算，在数值求解时，只需计算低阶次的传递矩阵和行列式值，从而大量节省了计算工作量和规模。不管离散化以后的系统总自由度数有多少，也不影响传递矩阵的阶数。传递矩阵的阶数由构成模型的单元性质决定。描写单元运动的微分方程式的阶数就是传递矩阵的阶数。另外，

由于求解过程中采用了试代频率法，所以能够方便地完成某特定频率区间的固有频率扫描，制定该区间有没有、有多少频率存在，而不需要计算出全部固有特性。

本方法在求解过程中，存在大量的矩阵连乘运算，由于计算机的舍入误差等原因，往往会出现大的位数损失，在求解频率方程时出现两个接近的大数相减或者计算机数据溢出等现象，使得计算精度降低。在振型计算中，有时还会出现末端幅值急剧增长的失真现象。为此可采用双精度数据运算，采用无量纲化处理等措施。另外，采用 RICCATI 法对提高计算精度也有好处。

例 6-1 设有图 6-7 所示均匀悬臂梁，其截面弯曲刚度为 EI，梁本身质量可略去不计，设 $m_1 = m_2 = m_3 = m$，求系统的固有特性。

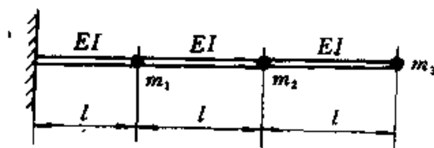


图 6-7

解 首先进行无量纲化，令

$$\bar{y} = y/l, \quad \bar{\theta} = \theta$$

$$\bar{M} = ml/EI, \quad \bar{Q} = Ql^2/EI$$

于是本题中各个子传递矩阵由(6-59)、(6-60)式化为

$$T_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha/2 & 1+\alpha/6 \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3$$

其中 $$\alpha = m\omega^2 l^3/EI$$

则 $$\omega = \sqrt{EI\alpha/ml^3}$$

系统的传递方程可写为

$$Z_3^R = T_3T_2T_1Z_0^R = TZ_0^R$$

其边界条件为

$$\bar{y}_0 = \bar{\theta}_0 = \bar{M}_3^R = \bar{Q}_3^R = 0$$

频率方程式为

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{vmatrix} = 0$$

取 $\alpha = 0.085\,5$，算出 T，从中取 $t_{33}, t_{34}, t_{43}, t_{44}$ 得

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} 1.257\,11 & 3.142\,70 \\ 0.606\,43 & 1.516\,45 \end{vmatrix} = 0.000\,51 \approx 0$$

可见，由 $\alpha = 0.085\,5$ 确定的 ω 已经足够精确地代表系统的一个固有频率，即有

$$\omega_1^2 = 0.085\,5\,\frac{EI}{ml^3}$$

利用此 α 值可进一步确定主振型，由方程

$$t_{33}\bar{M}_0 + t_{34}\bar{Q}_0 = 0$$

可得

$$\bar{M}_0 = -\frac{3.142\,70}{1.257\,11}\bar{Q}_0 = -2.5\bar{Q}_0$$

于是有

$$\bar{y}_1 = t_{1,13}\bar{M}_0 + t_{1,14}\bar{Q}_0 = -0.5 \times 2.5\bar{s}_0 + 0.166\ 67\bar{s}_0 = -1.083\ 33\bar{Q}_0$$

如果取 $\bar{y}_1$ 为基准，即令 $\bar{y}_1 = 1$，则有

$$\bar{Q}_0 = -\frac{1}{1.083\ 33} = -0.923\ 1$$

$$\bar{M}_0 = 2.307\ 7$$

由此可进一步计算 $\bar{y}_2, \bar{y}_3$。

各个不同的试算频率 ω，得到不同的 α 值，经过上述相同过程可找出系统的其他各阶固有频率。表 6-1 列出了各阶固有频率对应的阶次 i，α_i 和振型 $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}$。

表 6-1

i	1	2	3
$\omega_i^2 \frac{ml^3}{EI}$	0.085 5	3.668	26.48
$y_1^{(i)}$	1	1	1
$y_2^{(i)}$	3.399	1.188	−0.699
$y_3^{(i)}$	6.393	−0.788	0.215

§6.2 RICCATI 法

在 Riccati 法中，将状态向量 $\boldsymbol{Z}_i$ 中的元素分为 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}$ 两组，即

$$\boldsymbol{Z}_i = [\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{e}]_i^{\mathrm{T}} \tag{6-38}$$

其中 $\boldsymbol{f}$ 由起始截面状态向量的 r 个元素中，具有零值的 $r/2$ 个元素组成，其余元素则组成子向量 $\boldsymbol{e}$，对于图 6-2 所示系统，因左端边界条件为 $M_0 = Q_0 = 0$，故选择

$$\boldsymbol{f} = [M \quad Q]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e} = [y \quad \theta]^{\mathrm{T}} \tag{6-39}$$

则由(6-6)式交换相应的行和列可改写成：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \cdots \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}_{i+1}^{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{11} & \vdots & \boldsymbol{T}_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{T}_{21} & \vdots & \boldsymbol{T}_{22} \end{bmatrix}_{i+1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \cdots \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}_i \tag{6-40}$$

式中

$$\boldsymbol{T}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{m\omega^2 l^2}{2EJ} & 1 + \frac{m\omega^2 l^3}{6EJ} \end{bmatrix}_{i+1} \tag{6-41}$$

$$\boldsymbol{T}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m\omega^2 & m\omega^2 l \end{bmatrix}_{i+1} \tag{6-42}$$

$$\boldsymbol{T}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} \\ \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} \end{bmatrix}_{i+1} \tag{6-43}$$

$$T_{22} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{i+1} \tag{6-44}$$

引入如下的变换式

$$f_i = S_i e_i \tag{6-45}$$

(6-45) 式称为 Riccati 变换式。S 称为 Riccati 传递矩阵，它是一个 $(r/2) \times (r/2)$ 阶的待定矩阵。把(6-45) 式代入(6-40) 式，则有

$$e_i = [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} e_{i+1} \tag{6-46}$$

$$f_{i+1} = [T_{11}S + T_{12}]_i [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} e_{i+1} \tag{6-47}$$

对比(6-45) 式与(6-47) 式得

$$S_{i+1} = [T_{11}S + T_{12}]_i [T_{21}S + T_{22}]_i^{-1} \tag{6-48}$$

(6-48) 式就是 Riccati 传递矩阵的递推公式。由起始截面的边界条件知：$f_0 = 0$，而且 $e_0 \neq 0$，则有初始条件式：$S_0 = 0$，将 S_0 代入(6-48) 式即可依次递推而得到 $S_1, S_2, \cdots, S_K$，对末端截面 K(见图 6-2)，由(6-45) 式得

$$f_K = S_K e_K \tag{6-49}$$

对于图 6-2 所示模型，末端边界条件为：

$$f_K = 0, \quad e_K \neq 0 \tag{6-50}$$

故(6-49) 式有解的必要条件是

$$\Delta(\omega^2) = \det(S_K) = \begin{vmatrix} S_{K11} & S_{K12} \\ S_{K21} & S_{K22} \end{vmatrix} = 0 \tag{6-51}$$

(6-51) 式就是频率方程。解出此方程的根即可求出系统的固有频率。式中 $\Delta(\omega)$ 也称剩余量。在固有频率 ω 求出后，S_K 为已知。由(6-49) 式知：

$$f_K = \begin{bmatrix} S_{K11} & S_{K12} \\ S_{K21} & S_{K22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_K = 0$$

由上式可得：

$$\theta_K = -(S_{K11}/S_{K12})y_K = -(S_{K21}/S_{K22})y_K = \beta_K y_K$$

上式中

$$\beta_K = -S_{K11}/S_{K12} = -S_{K21}/S_{k22} \tag{6-52}$$

考虑到归一化，令 $y_K = 1.0$

则有

$$e_K = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix}_K \tag{6-53}$$

再由(6-46) 式从右向左递推就可以求出相应的固有振型。因式$[T_{21}S + T_{22}]^{-1}$ 在(6-48) 式的递推过程中已经求得，不必重新计算，所以振型的计算是简单的。

现将频率方程的求解问题讨论如下：

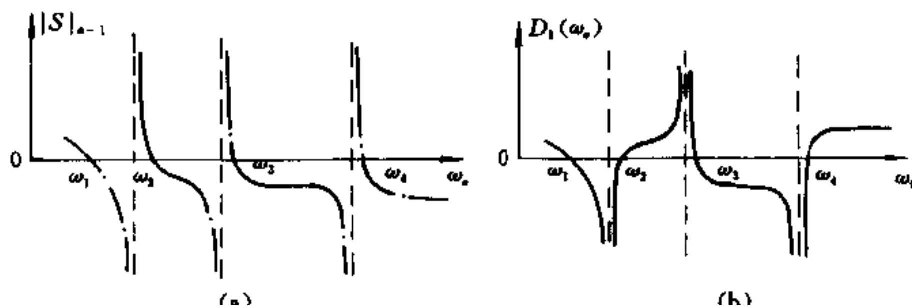
因为在递推式(6-46) 的计算中含有矩阵求逆，所以在不断地用试算频率 ω_* 代入(6-51) 式计算剩余量 $\Delta(\omega_*^2)$ 的过程中，剩余量曲线经常会出现异号无穷型奇点(图 6-8(a))。而固有频率值有时与奇点数值很接近，故容易出现丢根现象。为此，在求解固有频率时，将剩余量加以改造，得到新的剩余量 $D_1(\omega_*^2)$ 的表达式作为新的频率方程，对于两端自由或弹性支承的约束

形式，其频率方程为[24]

$$D_1(\omega^2) = \text{[illegible]}$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$

51）式的计算工作量几乎相等。实际上如图 6－8 所示，(6－54) 式是把(6－51) 式中异号无穷型奇点(点划线) 变为同号无穷型奇点(实线)[24]。在不断用试算频率 ω_* 计算 $D_1(\omega_*^2)$ 时，只有跨过一个真正的根，D_1 才会变号。故只要所选试算频率的步长小于两个固有频率之差值，就不会发生丢根现象，而这一条件是极易满足的。



性件的场阵与点阵相乘，可得典型区段（一个弹性件与一个惯性件为一区段）的传递矩阵，在不考虑转动惯量及剪切影响以及抗弯刚度在段内为常量的条件下，由(6－9)式可表示区段内的状态向量传递关系。推力产生的轴向力以轴向内力形式作用于各状态，由图6－9所示轴力平衡图得相邻状态轴力关系式

$$R_{i+1} = R_i + T_i - m_i a_x \qquad (6-55)$$

式中　T_i —— 作用于 i 点的发动机推力；

R_i、R_{i+1} —— 点 i 和点 $i+1$ 处的轴向力；

m_i，m_{i+1} —— 点 i 和点 $i+1$ 的质点质量；

a_x —— 系统的轴向加速度。

当梁变形后，R_i 将产生附加弯矩 $R_i(y_{i+1} - y_i)$，如图 6－10 所示。

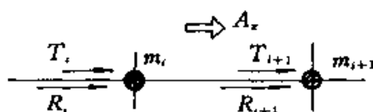


图　6－9

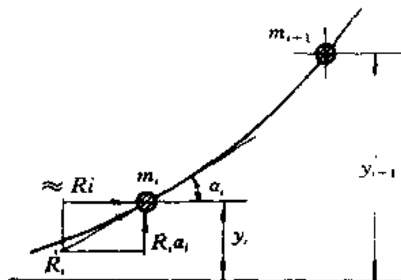


图　6－10

由于(6－55)式中 T_i，m_i，A_x 均为已知量，故每个状态的 R_i 均为已知量。将附加力矩 $R_i(y_{i+1} - y_i)$ 补充到力矩平衡方程中，用与前面同样的方式，可导出考虑轴力情况下的传递矩阵，得

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i+1}^{R} = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/2EJ & l^3/6EJ \\ 0 & 1 & 1/EJ & l^2/2EJ \\ 0 & R_i l & 1 + R_i l^2/2EJ & l + R_i l^3/6EJ \\ mw^2 & ml\omega^2 & ml^2\omega^2/2EJ & 1 + ml^3\omega^2/6EJ \end{bmatrix}_{i+1} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{i}^{R}$$

二、气动力的影响

无旋、尾翼稳定的发射飞行器，它的法向力系数斜率 $C_{n\alpha}\left(= \dfrac{\mathrm{d}C_n}{\mathrm{d}\alpha}\right)$ 的分布，一般如图 6－11 所示。

将法向气动力与惯性力相似地进行离散化，分布的法向力系数斜率 $C_{n\alpha}(x)$ 以相应的在各状态的离散值 $C_{n\alpha_i}$ 来近似代替。这样，在每个质点处均为法向惯性力与法向气动力共同作用，即

$$F_i = m_i\omega^2 x_i + qSC_{n\alpha_i}\alpha_i \qquad (6-56)$$

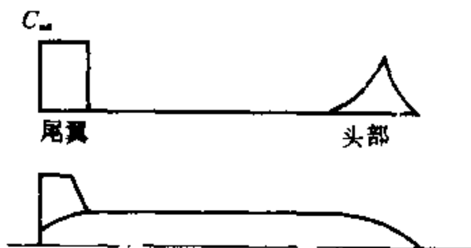


图　6－11

式中　F_i —— i 质点上法向外力；

q —— 动压；

S —— 参考面积；

$C_{n\alpha_i}$—— 离散法向力系数斜率；

α_i —— 局部迎角，即 θ_i。

令 $N_i = qSC_{n\alpha_i}$，则系统各点的点阵为

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_i\omega^2 & N_i & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

场阵没有变化，故传递矩阵可写成

$$
T = \begin{bmatrix} 1 & l & l^2/2EJ & l^3/6EJ \\ 0 & 1 & l/EJ & l^2/2EJ \\ 0 & 0 & 1 & l \\ m\omega^2 & m\omega^2 l + N & (m\omega^2 l^2/2EJ) + (Nl/EJ) & 1 + (m\omega^2 l^3)/6EJ) + (Nl^2/2EJ) \end{bmatrix}
$$

§6.4　传递矩阵法的一些特殊问题

一、分析模型中的质量处理

采用传递矩阵法，虽然从原理上并不限于应用集中质量，但为了简单，多数采用集中质量模型。这样，确定合适的集中质量数目就是个关键性环节。数目过多，不但增加计算工作量，而且对精度并无好处；数目太少，频率误差过大，而且振型会发生畸变。目前对梁式飞行器结构有两种经验公式：一为，质量点数要大于欲求最高频率阶次的 10 倍，即 $p \geqslant 10n$，另一为

$$
p \geqslant 13n^{1/3} \tag{6-57}
$$

式中　p —— 要求的质量点数；

　　n —— 要求计算的最高阶数。

此公式限于 5 阶以内使用。

根据对某火箭的计算经验，我们初步认为，采用(6-57)式较为合适。根据计算可知(见表 6-2)，整个火箭取 20 个质点，前三阶频率基本已达到稳定值。依照(6-57)式计算，需采用 19 个质点。

表 6-2　频率随质点数变化情况　　　　单位：Hz

	一　阶		二　阶		三　阶	
		值　差		差　值		差　值
10 点	156.87		442.59		802.32	
		1.34		17.39		98.53
20 点	158.21		459.98		900.85	
		0.30		3.38		5.41
30 点	157.91		463.36		895.44	

对于惯性质量矩突出的质量分布情况，应计入惯性质量矩的附加项。不过习惯上宁可将质量点数目加多，而不增加惯性质量矩项，这样计算较为简单方便。

二、关于寻根技术

采用传递矩阵法求频率，需解(6-15)、(6-51)式等高阶代数方程。一般只能采用试代解法，即代入一系列频率假定值，依照对应行列式值Δ，绘出Δ～ω图。找到交点(Δ变号处)，即为所求的各阶频率。使用计算机后，这一过程虽然可在计算机内自动完成，但还存在一个扫瞄步距的选择问题。步距过大，可能发生丢根现象。如图6-12，当步距大到一步可跨过两个根时，Δ的变号现象就被隐蔽，ω_2,ω_3两根被丢掉。为了防止此现象，可缩小步距，但这样势必普遍增加工作量。这一矛盾对于频率分布疏密相间的系统尤为突出。

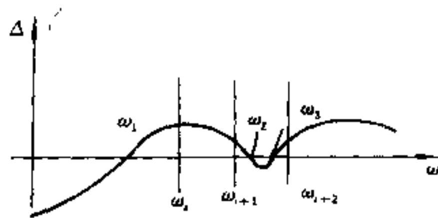


图 6-12

具体求解可以采用的方法之一是两分法。首先，求出两个试代频率ω_1'和ω_2'的函数值$\Delta(\omega_1')$和$\Delta(\omega_2')$，比较二者的符号。若为同号，ω_2'增加一个增量得到一个新的ω_2'，重复同样的步骤。若$\Delta(\omega_1')\times\Delta(\omega_2')$为负，取$\omega_1'$和$\omega_2'$的中点$\omega_3'$计算$\Delta(\omega_3')$，比较$\Delta(\omega_3')$和$\Delta(\omega_1')$的符号，若为异号，再取$\omega_1'$和$\omega_3'$的中点。若为同号，取$\omega_2'$和$\omega_3'$的中点重复上述过程，一直达到希望的准确度为止。

三、关于无量纲化处理

在进行矩阵运算时，为了在多次矩阵相乘中防止由于舍入误差等因素往往引起大的位数损失，防止计算机溢出等，希望矩阵元素化为1的量级。因此，不论哪一种解法，都需要预先把状态向量和传递矩阵无量纲化。仍以梁的横向弯曲振动为例。

设系统的特征长度或者分割的平均长度为l_0，平均弯曲刚度为E_0J_0，则各状态向量按下列形式无量纲化：

$$\bar{y}=y/l_0,\quad \bar{\theta}=\theta,\quad \bar{M}=\frac{l_0}{E_0J_0}M,\quad \bar{Q}=\frac{l_0^2}{E_0J_0}Q \tag{6-58}$$

同时也将传递矩阵无量纲化

$$\bar{l}=\frac{l}{l_0},\quad \overline{EJ}=\frac{EJ}{E_0J_0},\quad \overline{m\omega^2}=\frac{l_0^3}{E_0J_0}m\omega^2 \tag{6-59}$$

则(6-6)式可写成以下无量纲形式：

$$\begin{bmatrix}\bar{y}\\ \bar{\theta}\\ \bar{M}\\ \bar{Q}\end{bmatrix}_n^R=\begin{bmatrix}1 & \bar{l} & \dfrac{\bar{l}^2}{2\,\overline{EJ}} & \dfrac{\bar{l}^3}{6\,\overline{EJ}}\\ 0 & 1 & \dfrac{\bar{l}}{\overline{EJ}} & \dfrac{\bar{l}^2}{2\,\overline{EJ}}\\ 0 & 0 & 1 & \bar{l}\\ \overline{m\omega^2} & \overline{m\omega^2}\bar{l} & \dfrac{\bar{l}^2}{2\,\overline{EJ}}(\overline{m\omega^2}) & 1+\dfrac{\bar{l}^3}{6\,\overline{EJ}}(\overline{m\omega^2})\end{bmatrix}_n\begin{bmatrix}\bar{y}\\ \bar{\theta}\\ \bar{M}\\ \bar{Q}\end{bmatrix}_{n-1}^R \tag{6-60}$$

上式与在(6-6)式所有变量上加“—”符号是完全相同的。

四、关于连接部位刚度的处理

飞行器总是由若干个部件连接而成的，例如导弹弹身是由若干个舱段连接起来的。大量事实证明，连接部位分离面的连接刚度对飞行器固有特性有明显的影响，因为它们通常低于相应的周围结构刚度。表 6-3 列出某导弹全弹一至四阶固有频率的试验值和计算值。其中不考虑连接刚度影响的计算方案采用集中质量模型的传递矩阵法。状态 A 的舱段是用连接刚度较弱的普通径向螺钉连接，状态 B 是用连接刚度相对较强的斜衬套螺钉连接。由表中可见，因分离面刚度下降，使固有频率的试验值明显低于不考虑连接刚度的计算值。

表 6-3　某导弹固有频率计算值和试验值的比较

状　态		A				B			
阶　次		1	2	3	4	1	2	3	4
试验值 /Hz		33.3	112.2	178.0		44.1	105.6	184.9	235.9
不考虑连接刚度	计算值 /Hz	40.85	130.17	237.49	349.87	49.92	107.01	219.85	312.24
	相对误差	22.7%	16.0%	33.4%		13.2%	1.34%	18.9%	32.4%
考虑连接刚度	计算值 /Hz	32.87	107.63	190.98	248.62	45.61	97.35	192.19	237.82
	相对误差	1.29%	4.07%	7.29%		3.42%	7.81%	3.94%	0.81%

在传递矩阵法中，为考虑分离面连接刚度削弱的影响，在拟定分析模型时假设弹身做横向振动中分离面两边的挠度 y 和转角 θ 不相等而发生突变。为此，在分离面两边各设一个集中质量点，此两点之间的距离设为零，并用一个承受弯矩的盘式弹簧和一个承受横向力的拉压弹簧把它们连接起来（图 6-13）。

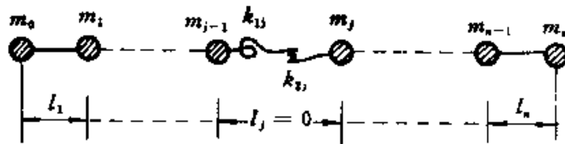


图　6-13

图 6-13 的系统中，m_{j-1} 和 m_j 为分离面两边的集中质量，k_{1j} 为盘式弹簧的刚度系数，k_{2j} 为拉压弹簧的刚度系数，则场传递关系可写成

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_j^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/k_{2j} \\ 0 & 1 & 1/k_{1j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{bmatrix}_{j-1}^R \tag{6-61}$$

而点阵的形式没有变化，则在 l_j 段内的传递矩阵可写成

$$\boldsymbol{T}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/k_{2j} \\ 0 & 1 & 1/k_{1j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_j\omega^2 & 0 & 0 & 1-m_j\omega^2/k_{2j} \end{bmatrix} \tag{6-62}$$

并有

$$Z_j^R = T_j Z_{j-1}^R \tag{6-63}$$

这样，只要在进行传递矩阵及相应的递推运算过程中，在对应的典型段 l_j 中引入(6-62)式和(6-63)式，即可得到考虑了连接面刚度的固有特性。

习　　题

6-1　已知一圆形等截面悬臂梁，如图(习题 6-1 图)所示，图中 $L(1)=0.125, L(2)=L(3)=L(4)=0.25$，弯曲刚度 $EI(1)=EI(2)=EI(3)=EI(4)=1$，质点质量 $M(1)=M(2)=M(3)=M(4)=0.25$。采用传递矩阵法程序计算各阶固有圆频率与主振型。取最大迭代次数为 400，初始步长为 1，频率估算中误差的控制精度为 0.1×10^{-6}。

答：$\omega = 0.356\,7D+01\ RAD/s$

$$\phi^{(1)} = \begin{cases} 0.000\,0D+00 \\ 0.527\,3D-02 \\ 0.416\,5D-01 \\ 0.999\,8D-01 \\ 0.167\,5D+00 \end{cases}$$

$\omega_2 = 0.231\,8D+02\ RAD/s$

$$\phi^{(2)} = \begin{cases} 0.000\,0D+00 \\ 0.125\,7D-02 \\ 0.589\,5D-02 \\ 0.445\,8D-02 \\ -0.416\,7D-02 \end{cases}$$

$\omega_3 = 0.663\,2D+02\ RAD/s$

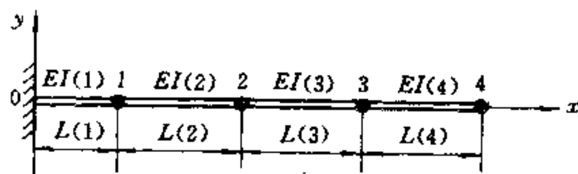
$$\phi^{(3)} = \begin{cases} 0.000\,0D+00 \\ 0.587\,5D-03 \\ 0.111\,1D-02 \\ -0.122\,6D-02 \\ 0.437\,1D-03 \end{cases}$$

$\omega_4 = 0.141\,0D+3\ RAD/s$

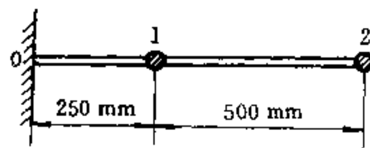
$$\phi^{(4)} = \begin{cases} 0.000\,0D+00 \\ 0.262\,9D-03 \\ -0.921\,1D-04 \\ 0.393\,7D-04 \\ -0.887\,7D-05 \end{cases}$$

6-2　求图(习题 6-2 图)所示的集中质量系统的固有频率。设 $m_1=m_2=20$ kg，梁的弯曲刚度 $EI=3\ \mathrm{N\cdot m^2}$，梁的质量忽略不计。

答：$\omega_1 = 32.3$ rad/s　　$\omega_2 = 269$ rad/s



习题　6-1 图



习题　6-2 图

6-3　用 RICCATI 法重新求解习题 6-1。

第七章 有限元—传递矩阵联合法

§7.1 联合法的基本原理

从第五、第六两章可以看到有限元素法虽然可以处理各种复杂结构，但为了得到精确解往往需要较多的单元数，从而导致计算机容量和计算时间显著增加。传递矩阵法虽然要求的计算机容量不随单元数目剧增，但它只适用于解决链式结构。如果能将两法结合起来就可形成一种新方法。联合法(Finite Element and Transfer Method，简记 FETM 法）就是这一思想的产物。

联合法的基本思想是，首先将一个二维结构沿一个主传递方向分割为有限数目的状态。每两个状态之间的子域进行有限元分割，运用有限元经典方法建立子域两端状态向量间的变换关系，进而用经典传递矩阵法建立主传递方向首末边界状态向量间的关系。引入边界条件，建立频率方程，解方程，得频率，再根据状态向量传递关系依次解出对应的振型。

联合法的出现，改变了传递矩阵法只适用于解一维问题的形象，开拓了传递矩阵法解决任何复杂结构问题的前景。虽然目前的研究只限于解二维板的领域，可用于飞行器板类结构或长壳类结构的计算，但从原理上不难推广到更一般的三维结构。

本章将以平面板为例，阐述联合法的基本原理。

图 7-1 所示一板结构或一壳体结构。

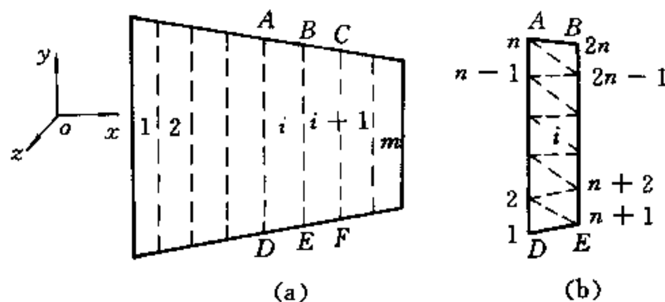


图 7-1

选择 x 方向为主传递方向，沿 x 方向将板或壳分割为 m 条，建立 $m+1$ 个状态，如图 7-1(a) 所示。每一条内进行有限元分割，图 7-1(b) 所示为取三角单元情况。

任一节点 p 的节点位移向量用 $\boldsymbol{\delta}_p$ 表示，对应节点力向量用 $\boldsymbol{F}_p$ 表示。在板问题中 $\boldsymbol{\delta}_p$ 由三个量构成 —— 即 $\omega, \theta_x = \dfrac{\partial w}{\partial y}, \theta_y = -\dfrac{\partial w}{\partial x}$，对应的力分量为 F_z, M_x, M_y。

在选定的一种位移函数条件下，可以得到每个元素的刚度矩阵及一致质量矩阵。通过叠加原理可导得一条的（如第 i 条）刚阵与质阵。引入该条的外边界条件，如图所示 i 条当 AB 及 DE

有的位移分量为零时，则将节点 $n,2n,n+1,1$ 的对应位移的行与列抹去，得到第 i 条的有效刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_i$ 及有效质量矩阵 $\boldsymbol{M}_i$。每条均按此法进行，则可得各条的刚阵与质阵。

第 i 条的动平衡方程为

$$\boldsymbol{K}_i\begin{bmatrix}\delta_L\\\delta_R\end{bmatrix}-\omega^2\boldsymbol{M}_i\begin{bmatrix}\delta_L\\\delta_R\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}F_L\\F_R\end{bmatrix}_i \qquad (7-1)$$

式中　下角标 L,R 分别表示左状态与右状态。

$$\boldsymbol{\delta}_{L_i}=\begin{bmatrix}DE\text{ 上 }\delta_1\text{ 的非零元素}\\\delta_2\\\delta_3\\\vdots\\\delta_{n-1}\\AB\text{ 上 }\delta_n\text{ 的非零元素}\end{bmatrix} \qquad (7-2)$$

其他类推。

将(7-1)式简写为

$$\boldsymbol{S}_i\begin{bmatrix}\delta_L\\\delta_R\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}F_L\\F_R\end{bmatrix}_i \qquad (7-3)$$

式中　$\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{K}_i-\omega^2\boldsymbol{M}_i$ 称为**动力矩阵**。 (7-4)

将 S 阵分块得

$$\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\delta_L\\\delta_R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_L\\F_R\end{bmatrix}_i \qquad (7-5)$$

经简单运算，(7-5) 式可重排为如下形式

$$\begin{bmatrix}\delta_R\\-F_R\end{bmatrix}_i=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}_i\begin{bmatrix}\delta_L\\F_L\end{bmatrix}_i=\boldsymbol{T}_i\begin{bmatrix}\delta_L\\F_L\end{bmatrix}_i \qquad (7-6)$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{11\,i}&=-\boldsymbol{S}_{12\,i}^{-1}\boldsymbol{S}_{11\,i}\\\boldsymbol{T}_{12\,i}&=\boldsymbol{S}_{12\,i}^{-1}\\\boldsymbol{T}_{21\,i}&=-\boldsymbol{S}_{21\,i}+\boldsymbol{S}_{22\,i}\boldsymbol{S}_{12\,i}^{-1}\boldsymbol{S}_{11\,i}\\\boldsymbol{T}_{22\,i}&=-\boldsymbol{S}_{22\,i}\boldsymbol{S}_{12\,i}^{-1}\end{aligned} \qquad (7-7)$$

(7-6) 式就是一个有限元子域左、右状态向量间的传递关系。由(7-7) 式可知，为保证 $S_{12\,i}^{-1}$ 成立，显然要求 δ_L 与 δ_R 维数相同。

由相邻条间连续条件可得

$$\boldsymbol{\delta}_{R\,i}=\boldsymbol{\delta}_{L\,i+1} \qquad (7-8)$$

由相邻条间平衡条件有

$$\boldsymbol{F}_{R\,i}+\boldsymbol{F}_{L\,i+1}=\boldsymbol{F}_{\text{ext}\,BE} \qquad (7-9)$$

式中 $\boldsymbol{F}_{\text{ext}\,BE}$ 为沿 BE 边界处的外力。

在固有特性问题中，外力不存在，故有

$$\boldsymbol{F}_{R\,i}+\boldsymbol{F}_{L\,i+1}=\boldsymbol{0}$$

所以

$$-\boldsymbol{F}_{R\,i}=\boldsymbol{F}_{L\,i+1} \qquad (7-10)$$

将(7-8)、(7-10) 式结合则有

$$\begin{bmatrix} \delta_R \\ -F_R \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_{i+1} \tag{7-11}$$

将(7－11)式代入(7－6)式得

$$\begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_{i+1} = T_i \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_i \tag{7-12}$$

同理，可推得

$$\begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_i = T_{i-1} \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_{i-1} \tag{7-13}$$

依此推得各状态间的传递关系，综合后，得如下总传递关系

$$\begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_i = T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1 \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_1 \tag{7-14}$$

以 T_m 前乘上式，并应用(7－6)式得

$$\begin{bmatrix} \delta_R \\ -F_R \end{bmatrix}_m = T_m T_{m-1} \cdots T_1 \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_1 \tag{7-15}$$

简写为

$$\begin{bmatrix} \delta_R \\ -F_R \end{bmatrix}_m = \prod_{i=m}^{1} T_i \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_1 = T \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_1 \tag{7-16}$$

方程(7－16)建立了整个系统左边界状态向量与右边界状态向量间的传递关系。

将(T)分块得

$$\begin{bmatrix} \delta_R \\ -F_R \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_L \\ F_L \end{bmatrix}_1 \tag{7-17}$$

引入边界条件，可得频率方程。如左端为固支，右端为自由，则：

$$\delta_{L1} = F_{Rm} = 0 \tag{7-18}$$

代入(7－17)式得

$$\begin{bmatrix} \delta_R \\ 0 \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_L \end{bmatrix}_1 \tag{7-19}$$

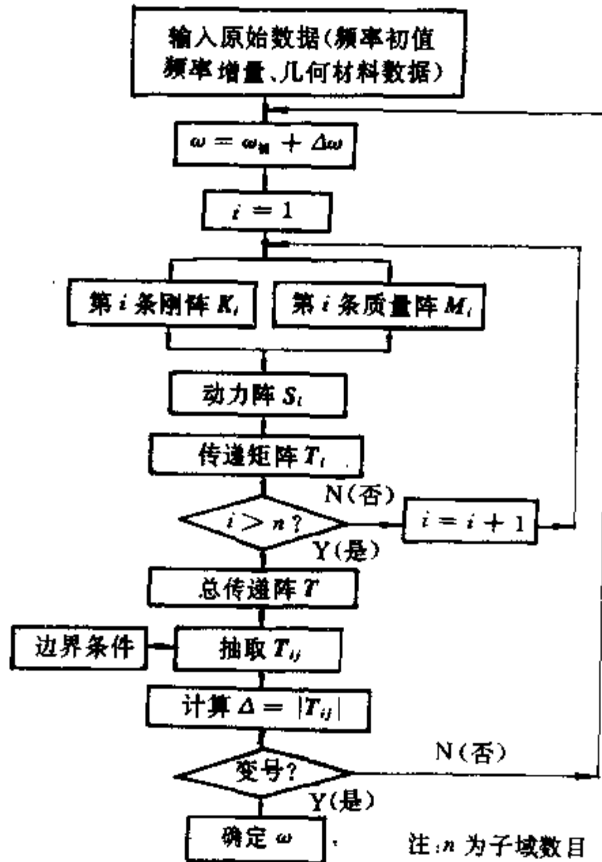


图　7－2

所以

$$0 = T_{22} F_{L1} \tag{7-20}$$

由 F_{L1} 具有非零解条件得频率方程为

$$|T_{22}| = 0 \tag{7-21}$$

计算频率的程序框图为图 7－2 所示：

确定出任一阶频率后可进而计算振型。

为计算振型首先要对它实施正规化措施。设选根部第一个节点的第一个力元素为1，则(7-20)式变为

$$
0=\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{21} & \cdots & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \cdots\cdots \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ \vdots \end{bmatrix}
$$

即
$$
0=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ F \end{bmatrix}
$$

所以
$$
0=t_{21}1+t_{22}F
$$

$$
t_{22}F=-t_{21} \tag{7-22}
$$

解(7-22)线性代数方程组，可解得 F。

这样，F_{L1} 已知，依对应传递矩阵关系依次可计得全部对应状态向量，摘出同类元素，即为对应于该阶频率的振型。

§7.2 一些特殊情况的处理

实际遇到的结构平面形状并不都像上节那样简单，而且每一条采用有限元时也可能采用具有中间节点的高精元。这些情况可采用下述方法来处理。

一、阶梯形平面板计算

以图7-3所示梯形平面板结构为例。

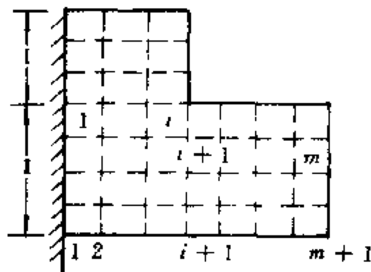


图 7-3

将根部分为Ⅰ，Ⅱ两区

$$
Z_i^R=T^{(1)}Z_1^L \tag{7-23}
$$

$$
\begin{bmatrix} \delta_{Ⅰ} \\ \delta_{Ⅱ} \\ F_{Ⅰ} \\ F_{Ⅱ} \end{bmatrix}^R=\begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} & T_{23}^{(1)} & T_{24}^{(1)} \\ T_{31}^{(1)} & T_{32}^{(1)} & T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)} \\ T_{41}^{(1)} & T_{42}^{(1)} & T_{43}^{(1)} & T_{44}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_{Ⅰ} \\ \delta_{Ⅱ} \\ F_{Ⅰ} \\ F_{Ⅱ} \end{bmatrix}_1^L \tag{7-24}
$$

从中摘出

$$
\begin{bmatrix} \delta_{Ⅱ} \\ F_{Ⅱ} \end{bmatrix}_i^R=\begin{bmatrix} T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} & T_{23}^{(1)} & T_{24}^{(1)} \\ T_{41}^{(1)} & T_{42}^{(1)} & T_{43}^{(1)} & T_{44}^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_{Ⅰ} \\ \delta_{Ⅱ} \\ F_{Ⅰ} \\ F_{Ⅱ} \end{bmatrix}_1^L \tag{7-25}
$$

又因

$$
\begin{bmatrix} \delta_{Ⅱ} \\ F_{Ⅱ} \end{bmatrix}_m^R=T^{(2)}\begin{bmatrix} \delta_{Ⅱ} \\ F_{Ⅱ} \end{bmatrix}_{i+1}^L
$$

由平衡与连续条件有

$$\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_m^R = \boldsymbol{T}^{(2)}\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\-F_{\rm I}\end{bmatrix}_t^R$$

将(7-25)式代入得

$$\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_m^R = \boldsymbol{T}^{(2)}\begin{bmatrix}T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} & T_{23}^{(1)} & T_{24}^{(1)}\\-T_{41}^{(1)} & -T_{42}^{(1)} & -T_{43}^{(1)} & -T_{44}^{(1)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\\delta_{\rm I}\\F_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_1^L = \boldsymbol{T}^{(3)}\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\\delta_{\rm I}\\F_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_1^L \tag{7-26}$$

将(7-24)、(7-26)式联合得

$$\begin{bmatrix}\delta_{{\rm I},m}^R\\F_{{\rm I},m}^R\\\cdots\\\delta_{{\rm I},t}^R\\F_{{\rm I},t}^R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \boldsymbol{T}^{(3)} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)}\\T_{31}^{(1)} & T_{32}^{(1)} & T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\\delta_{\rm I}\\F_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_1^L$$

重新排列

$$\begin{bmatrix}\delta_{{\rm I},t}^R\\F_{{\rm I},m}^R\\F_{{\rm I},t}^R\\F_{{\rm I},m}^R\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)}\\T_{11}^{(3)} & T_{12}^{(3)} & T_{13}^{(3)} & T_{14}^{(3)}\\T_{31}^{(1)} & T_{32}^{(1)} & T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)}\\T_{21}^{(3)} & T_{22}^{(3)} & T_{23}^{(3)} & T_{24}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\\delta_{\rm I}\\F_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_1^L \tag{7-27}$$

代入边界条件

$$\begin{bmatrix}F_{{\rm I},t}^R\\F_{{\rm I},m}^R\end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{\rm I}\\\delta_{\rm I}\end{bmatrix}_1^L = \boldsymbol{0} \tag{7-28}$$

则得

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)}\\T_{23}^{(3)} & T_{24}^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{\rm I}\\F_{\rm I}\end{bmatrix}_1^L$$

频率方程为

$$\begin{vmatrix}T_{33}^{(1)} & T_{34}^{(1)}\\T_{23}^{(3)} & T_{24}^{(3)}\end{vmatrix} = 0 \tag{7-29}$$

二、采用高精元时中间节点的处理

当采用中间插入内节点的高精度元素时，会出现如图7-4所示的类似情况。图中所示为一个典型子域，在每个状态剖面除常规节点外，还有内节点 $\delta_{\rm int}$ 出现。为在状态向量中消除这些内节点，可采取如下方法。

由动力方程有

$$\begin{bmatrix} A & B & \cdots & E \\ C & D & \cdots & F \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G & H & \cdots & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_L \\ \delta_R \\ \delta_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ F_R \\ F_{int} \end{bmatrix} \tag{7-30}$$

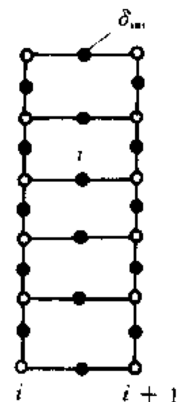


图 7-4

由于 $F_{int} = 0$

故有

$$\left[\begin{array}{cc:c} A & B & E \\ C & D & F \\ \hdashline G & H & L \end{array}\right] \begin{bmatrix} \delta_L \\ \delta_R \\ \cdots\cdots \\ \delta_{int} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ F_R \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7-31}$$

这样有

$$A\delta_L + B\delta_R + E\delta_{int} = F_L \tag{7-32}$$

$$C\delta_L + D\delta_R + L\delta_{int} = F_R \tag{7-33}$$

$$G\delta_L + H\delta_R + L\delta_{int} = 0 \tag{7-34}$$

由(7-34)式得

$$\delta_{int} = -L^{-1}(G\delta_L + H\delta_R) \tag{7-35}$$

由(7-35)式代入(7-32)、(7-33)式得

$$\begin{bmatrix} A - EL^{-1}G & B - BL^{-1}H \\ C - FL^{-1}G & D - FL^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_L \\ \delta_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ F_R \end{bmatrix} \tag{7-36}$$

这样,就可进一步建立高精元情况下的第 i 条状态向量传递关系。

第八章　子结构模态综合法

§8.1　基本原理

子结构模态综合法是通过改变坐标系统而导入的卓有成效的计算方案。

采用合理的坐标系统，对简化计算可发挥巨大作用，这在普通振动基本理论中已有论述。如对一个弹性梁，用直角物理坐标，本为无穷自由度系统，但由李兹引入了广义坐标——模态坐标后，坐标数就可取几个甚至一两个，而所解结果的精度完全可以满足工程要求。广义坐标之所以能发挥这么大效能，是由于坐标本身变为一个带有加权因子的连续函数。如果所假定的坐标函数能相当好地满足边界条件与动位移规律的要求，则通过加权因子（即广义坐标）的调整，就能很好地逼近真实运动。子结构模态综合法也是应用此原理。它是李兹广义模态法在复杂结构中的具体应用。将整个系统划分为几个子结构，对每个子结构进行模态分析，取得子结构模态参数；然后，将每个子结构的坐标系由物理坐标变换到模态坐标；在模态坐标表示下，将全部子结构在满足子结构间耦合条件的基础上进行综合，即可得到全系统的固有特性——频率、振型。

模态综合技术是从1965年Hurty发表第一篇所谓"分量模型法"时开始的。他不但给出了模态综合方法的基本原理，而且将其直接用到火箭技术的计算中。1968年，Craig又将他的方法做了改进，使约束模态与刚体模态合并，省去了子结构间多余约束的判定，为将其应用到复杂结构扫除了障碍。不过，他们都是在周围全部固支的条件下确定子结构模态的。1969年，Goldman和Hou分别提出了自由交界面子结构模态分析法，使子结构模态分析大大简化，但精度不高。后来，人们又将1967年Bamford提出的附加模态并入模态坐标，从而使子结构模态综合法日益完善，成为卓有成效的复杂结构固有特性分析方法。

此法的优点是：不但使解法大大简化，而且特别适合于大型宇航飞行系统的分析：各个子结构的模态信息既可以由分析得到，也可以通过实验得到，这就有助于克服大型飞行器做全机振动试验的困难，将实验环节转移到各个大部件范围，最后用本法可综合出全系统的动力性能；另外，任何局部部件的更动，只在此局部修改计算，而不影响其他部件已有的基本矩阵，这大大有利于设计优化的研究。

假定将整个系统分割为n个子结构，对每个子结构施加一定的边界条件，采用分析方法（如有限元或联合法）或实验方法得到子结构的模态信息——各阶频率与振型。选取子结构模态的全部或局部，再附加上一定数量的静模态，组成模态矩阵，作为模态变换阵，它也就是模态坐标基底。如下所示为模态变换阵选择的一种典型形式：

$$U_i = [\phi_r \mid \phi_c \mid \phi_a \mid \phi_N]_i \tag{8-1}$$

式中　ϕ_r——刚体模态集合；

ϕ_c——约束模态集合；

ϕ_a —— 附加模态集合；

ϕ_N —— 弹性模态(一般为截断情况)集合。

U_i 就相当于振动基本理论中李兹法的位移试函数。它的选取方法不同，对计算精度与计算量大小有很大影响，也是各种子结构模态综合法的主要分界线。对每个子结构均可得到对应的 U_r 阵，这样就可对整个系统实施坐标变换：

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & & & \\ & U_2 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \tag{8-2}$$

式中　X_i —— 第 i 个子结构物理坐标，

ξ_i —— 对应于各个子结构的模态坐标，也就是模态基底的加权因子。

上式可简写为：

$$X = U\xi \tag{8-3}$$

(8－3)式建立了物理坐标 X 与模态坐标 ξ 间的变换关系。

设已用有限元法或实验求得各子结构的质量和刚度矩阵为 M_i 和 $K_i(i = 1,2,\cdots,n)$，则可组成未考虑子结构间联系的非耦合块对角矩阵 $\overline{M}$,$\overline{K}$ 即

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & M_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & M_n \end{bmatrix} \quad \overline{K} = \begin{bmatrix} K_1 & & & & \\ & K_2 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & K_i & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & M_n \end{bmatrix}$$

令自由振动中拉格朗日(Lagrange)函数 L 为

$$L = T - U$$

式中　T —— 非耦合情况下系统动能；

U —— 非耦合情况下系统势能。

在各子结构无耦合情况下，全结构的拉格朗日函数可写成

$$L = \frac{1}{2}\dot{X}^{T}\overline{M}\dot{X} - \frac{1}{2}X^{T}\overline{K}X$$

将(9－3)式代入上式则有

$$L = \frac{1}{2}\dot{\xi}^{T}U^{T}\overline{M}U\dot{\xi} - \frac{1}{2}\xi^{T}U^{T}\overline{K}U\xi \tag{8-4}$$

由于 $\overline{M}$,$\overline{K}$,U 均为块对角阵，故其三乘积仍为块对角阵。故有：

$$U^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{M}}U = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{M}}_1 & & & & & 0 \\ & \overline{\boldsymbol{M}}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \overline{\boldsymbol{M}}_i & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \overline{\boldsymbol{M}}_n \end{bmatrix} \tag{8-5}$$

$$U^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}}U = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{K}}_1 & & & & & 0 \\ & \overline{\boldsymbol{K}}_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \overline{\boldsymbol{K}}_i & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \overline{\boldsymbol{K}}_n \end{bmatrix} \tag{8-6}$$

式中 $\overline{M}_i$ 与 $\overline{\boldsymbol{K}}_i$ 分别为第 i 个子结构的模态（或广义）质量矩阵与模态刚度矩阵。

$$\overline{\boldsymbol{M}}_i = \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{U}_i \tag{8-7}$$

$$\overline{\boldsymbol{K}}_i = \boldsymbol{U}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{U}_i \tag{8-8}$$

当所选用的坐标变换矩阵 $\boldsymbol{U}_i$ 为正交集合构成的正交阵时，对质量阵实施正规化，可得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} \tag{8-9}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{U} = \Omega^2 \tag{8-10}$$

式中 Ω^2 为子结构固有频率平方排成的对角阵。

当所选用的坐标变换阵 U_i 不是正交集合时，(8－9)、(8－10) 式将不存在。

(8－4) 式中 ξ 为不独立向量。各子结构边界处必须满足连续条件。引入约束方程，使子结构耦合在一起，得到全结构运动方程式。

设其约束方程为

$$\boldsymbol{CX} = \boldsymbol{0} \tag{8-11}$$

对约束方程中 $\boldsymbol{X}$ 实施坐标变换，即将(9－3) 式代入，则得

$$\boldsymbol{CU}\xi = \boldsymbol{0} \tag{8-12}$$

即

$$\boldsymbol{D}\xi = \boldsymbol{0} \tag{8-13}$$

式中

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{CU} \tag{8-14}$$

与第六章同理，选择其中独立部分为 ξ_2，非独立部分为 ξ_1，$\boldsymbol{D}$ 阵相应地分块，得

$$[\boldsymbol{D}_1 \vdots \boldsymbol{D}_2]\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{8-15}$$

解得

$$\xi_1 = -\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{D}_2\xi_2 \tag{8-16}$$

式中显然要求 $\boldsymbol{D}_1$ 可逆。

这样

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_1^{-1} & D_2 \\ & I \end{bmatrix} \xi_2 \tag{8-17}$$

简写为

$$\xi = V\xi_2 \tag{8-18}$$

选择 ξ_2 为广义坐标，以 q 表示，则得

$$\xi = Vq \tag{8-19}$$

将(8－19)式代入(8－4)式得

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} \overline{M} U V \dot{q} - \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} V^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} \overline{K} U V q \tag{8-20}$$

规定

$$M = V^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} \overline{M} U V \tag{8-21}$$

$$K = V^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} \overline{K} U V$$

故

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} M \dot{q} - \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} K q \tag{8-22}$$

代入拉格朗日方程得

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \tag{8-23}$$

(8－23)式即为欲求的全结构系统的基本运动方程式。以下的问题就是求解特征值问题了。

综合以上可知其求解步骤为：

(1) 划分子结构。

(2) 用解析法或实验法求各子结构固有特性及广义刚度、广义质量，结合成 $\overline{K}\overline{M}$。

(3) 选取各子结构的模态变换矩阵 U_i。

(4) 引入约束方程确定 q 向量及第二变换阵 V。

(5) 将 U_i 组合成 U 阵。

(6) 将 $U, V, \overline{M}, \overline{K}$ 代入(8－21)式，即得 M, K。

(7) 利用(8－23)式解特征值问题，得全系统固有特性。

§8.2　模态变换阵的构成选择与截断

随着大量研究工作的开展，出现了形形色色的子结构模态分析方法。众多的方法，按其实质区分，仅在于两个变换阵 U, V 的选择不同。U 的选择，就是选哪些模态构成模态变换阵。V 的选择不同，反映了引入约束方程变非耦合系统为耦合系统的手段不同。对解法、精度、工作量影响较为突出的是 U 阵的选择。

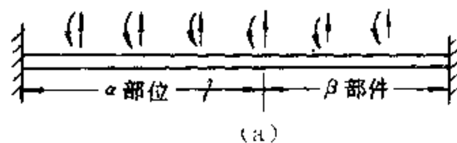
正如李兹假定位移法一样，对 U 阵的选择是具有任意性的。只不过选择得好，用少数自由度就可以得到好的结果，也就是收敛性能好；否则就要求更多的模态。目前，可供选择的模态有下列几种。

一、弹性振动固有模态

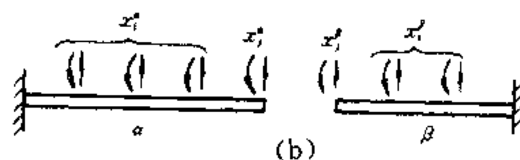
它属于动力模态。根据所取边界条件的不同，又分为固定边界的振动模态与自由边界的振动模态，以及混合边界振动模态。最常采用的是前两种。通常按子结构边界是固定还是自由将子结构综合法分为两大类。

以任一子结构 α 为例，如图 8－1 所示。在无阻尼自由振动情况下其运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix}^{\alpha} \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_j \end{bmatrix}^{\alpha} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^{\alpha} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_j \end{bmatrix} \qquad (8-24)$$



(a)



(b)

图 8-1

式中 i —— 子结构内部物理坐标；

j —— 子结构边界物理坐标；

f_j—— 子结构边界力。

1. 固定(支)界面条件下的正规模态

引入 $x_j \equiv 0$ 条件，则(8-24)可简化为如下特征值方程

$$(K_{ii} - \omega^2 m_{ii})x_i = 0 \qquad (8-25)$$

解得其各阶频率可构成 $\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_n^2) \qquad (8-26)$$

对应的正规振型构成固支(或约束)界面情况的正规模态矩阵

$$\phi_{N①} = \begin{bmatrix} \phi_{i1} & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{in} \\ 0_{j1} & 0_{j2} & \cdots & 0_{jn} \end{bmatrix} \qquad (8-27)$$

式中 ϕ_{ik} 的下标 i 表示内部坐标振型，k 为模态阶数($k = 1,2,\cdots,n$)；

0_{jk} 为零元素，下标 j 表示边界振型值，k 为模态阶数。

2. 自由界面条件下的正规模态

引入 $f_j \equiv 0$ 条件。由(8-24)式得如下特征值方程

$$(K - \omega^2 M)x = 0 \qquad (8-28)$$

式中 K, M, x 分别为子结构的刚度阵、质量阵及位移向量。

解之，得

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_N^2) \qquad (8-29)$$

注意此时 $N = n_i + n_j$，即：它包括边界自由度在内，显然 $\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \Omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$ 中有零元素，即包括有零频率。

对应的正规模态矩阵为

$$\phi_{N②} = \begin{bmatrix} \phi_{i1} & \phi_{i2} & \cdots & \phi_{iN} \\ \phi_{j1} & \phi_{j2} & \cdots & \phi_{jN} \end{bmatrix} \qquad (8-30)$$

二、约束模态

此种模态可作为固定界面正规模态的补充模态。其定义为：从子结构物理坐标 X 集合中

（它为 x_i 与 x_j 的总和）选出一部分坐标构成子集 C，对 C 集合中每个坐标分别给予单位位移，而保持 C 集合中其他坐标为零值，这样导出的静模态称为约束模态。由其定义，从方程（8－24）去掉惯性项后可导得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{vv} & \boldsymbol{K}_{vc} \\ \boldsymbol{K}_{cv} & \boldsymbol{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{vc} \\ \boldsymbol{\phi}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{vc} \\ \boldsymbol{R}_{cc} \end{bmatrix} \tag{8-31}$$

式中下标 v 表示 c 的补集（即 $c + v = X$）。$\boldsymbol{R}_{cc}$ 为在 c 坐标集合中的反力集合，它为 c 阶反力方阵。$\boldsymbol{I}_{cc}$ 为 c 阶单位阵。$\boldsymbol{0}_{vc}$ 为 $v \times c$ 阶零阵。而 $\boldsymbol{\phi}_{vc}$ 为下式所示

$$\boldsymbol{\phi}_{vc} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \vdots & \vdots & x_{1c} \\ x_{21} & x_{22} & \vdots & \vdots & x_{2c} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ x_{v1} & x_{v2} & \vdots & \vdots & x_{vc} \end{bmatrix}_{v \times c}$$

由（8－31）上面部分有

$$\boldsymbol{\phi}_{vc} = - \boldsymbol{K}_{vv}^{-1} \boldsymbol{K}_{vc} \tag{8-32}$$

由（8－32）式可知，为使 $\boldsymbol{K}_{vv}$ 可逆，C 子集的规模至少要能阻止该子结构的刚体运动发生。则约束模态为

$$\boldsymbol{\phi}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{vc} \\ \boldsymbol{I}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \boldsymbol{K}_{vv}^{-1} \boldsymbol{K}_{vc} \\ \boldsymbol{I}_{cc} \end{bmatrix} \tag{8-33}$$

显然约束模态为静力模态，约束模态数等于 c。

三、刚体模态

如果某子结构有 N_r 个刚体自由度，则选择 r 个坐标构成子集，用来阻止刚体运动。令 u 是在该子结构坐标总集 X 中 r 的补集。将（8－31）中的 c 用 r 置换，v 用 u 置换，得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{ur} \\ \boldsymbol{K}_{ru} & \boldsymbol{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{ur} \\ \boldsymbol{I}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{ur} \\ \boldsymbol{R}_{rr} \end{bmatrix} \tag{8-34}$$

（r 为静定约束集合时，$R_{rr} = 0$）

则刚体模态即为

$$\boldsymbol{\phi}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{ur} \\ \boldsymbol{I}_{rr} \end{bmatrix} \tag{8-35}$$

式中

$$\boldsymbol{\phi}_{ur} = - \boldsymbol{K}_{uu}^{-1} \boldsymbol{K}_{ur} \tag{8-36}$$

在自由界面正规模态中，$\boldsymbol{\phi}_N$ 中就包括有 N_r 个刚体模态。

四、附加模态（Attachment Modes）

附加模态也属于静模态。它的定义为：在子结构物理坐标 X 内规定一个子集 A，对此子集 A 中任一个坐标施加单位力，并使该子集其他坐标保持力为零值。这时所得到的子结构静挠度称为附加模态。

按子结构是否受到足够的约束可分为两种情况。

1. 约束子结构情况

令 w 为 X 中 a 的补集，则有

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wa} \\ K_{aw} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{wa} \\ \phi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{wa} \\ I_{aa} \end{bmatrix} \tag{8-37}$$

附加模态为
$$\phi_{a①} = \begin{bmatrix} \phi_{wa} \\ \phi_{aa} \end{bmatrix} \tag{8-38}$$

2. 无约束子结构情况

令集合 X 分成三个子集 r,a,w；其中 r 为静定约束集合，用来阻止刚体位移，a 为需加单位力得到附加模态的子集；w 为 a 与 r 合集的补集。于是有

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wa} & K_{wr} \\ K_{aw} & K_{aa} & K_{ar} \\ K_{rw} & K_{ra} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{wa} \\ \phi_{aa} \\ \phi_{ra} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{wa} \\ I_{aa} \\ R_{ra} \end{bmatrix} \tag{8-39}$$

式中 0_{ra} 是由于在约束自由度处位移为零而产生的零阵，R_{ra} 为约束反力矩阵。

由上式有

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wa} \\ K_{aw} & K_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{wa} \\ \phi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{wa} \\ I_{aa} \end{bmatrix} \tag{8-40}$$

于是得

$$\begin{bmatrix} \phi_{wa} \\ \phi_{aa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ww} & K_{wa} \\ K_{aw} & K_{aa} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{wa} \\ I_{aa} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} g_{wa} \\ g_{aa} \end{bmatrix} \tag{8-41}$$

则附加模态 $\phi_{a②}$ 为

$$\phi_{a②} = \begin{bmatrix} g_{wa} \\ g_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} \tag{8-42}$$

这四种模态是最常采用的。可以看到，除了正规模态外其他都是静模态。另外还有负载边界正规模态、惯性置换(Inertia Relief)附加模态、剩余附加模态等，不再一一列举。

选择哪些模态组成模态变换矩阵，是个技巧性较强的工作。一方面要考虑构成全系统的各个子结构在动态行为中的差异，另一方面要考虑计算的目的是在低阶区域还是高阶区域。这些因素都直接影响到模态种类与模态数量的决定。一个好的选择应该是，只选较少的模态就能取得好的计算结果。根据一些研究者(Ramsden，stoker，Levy，Downs 等)的经验认为：子结构的主自由度(即选择的模态数)约等于总系统要求的固有特性总数的 2 ～ 3 倍。

选择的一般原则为：

(1) 在计算系统的低阶固有特性时，应选子结构低阶正规模态，反之则应选取高阶部分。

(2) 模态间要互相独立。正交性条件最好满足，但它不是必要条件。

正规模态、刚体模态之间正交，约束边界正规模态与约束模态正交，这都是明显的，而自由边界正规模态与附加模态正交条件，必须采取一定的修正措施，才能予以保证。

(3) 一般都是对正规模态采用截断措施，但也有对其他模态(如约束模态)进行截断的。

(4) 所选模态要既能较好地描述子结构内部的动力位移状态，又能较好地描述子结构间交界处的动力位移状态。这也就是子结构正规振动模态不可缺少之外还要补充约束模态或者附加模态的原因。

目前流行的几种选择如下：

1. 约束界面子结构模态综合法

(1) Hurty 方案

$$\phi = [\phi_r, \phi_N, \phi_c] \tag{8-43}$$

其中，ϕ_N 为采用截断措施的正规模态；其他符号同前。

(2) Craig 对上法的改过方案

$$\phi = [\phi_N, \phi_c] \tag{8-44}$$

(3) Bamford 方案：
$$\phi = [\phi_r, \phi_c, \phi_N, \phi_a] \tag{8-45}$$

2. 自由界面子结构模态综合法

(1) Goldman 与 Hou 方案
$$\phi = \phi_N \tag{8-46}$$

(2) Hintz 改进方案
$$\phi = [\phi_N \phi_a] \tag{8-47}$$

例 8-1 图 8-2 为一等剖面、均匀材料的自由一自由梁

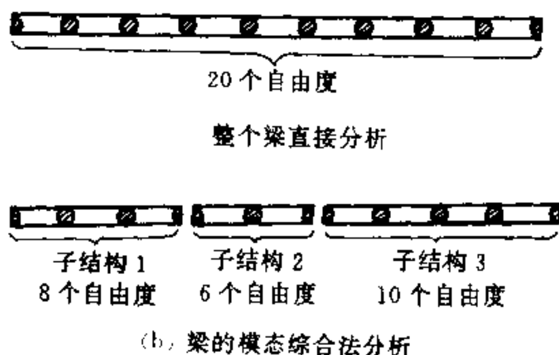


图 8-2

总长 $L = 137.16$ cm

总质量 $M = 13.28$ kg

弯曲刚度 $EI = 14\ 349\ \text{N} \cdot \text{cm}^2$

$$\frac{I}{A} = 188.13\ \text{cm}^2$$

A 为剖面面积

首先，对自由一自由梁进行整体有限元直接分析，计算固有频率。然后将全结构分为三个子结构，按模态综合法计算，其计算模型如图 8-2(b) 所示。整体模型为九个单元、10 个节点，20 个自由度。三个子结构的模型节点数分别为 4,3,5。自由度数分别为 8,6,10。模态矩阵 ϕ 选用 Goldman Hou 方案，即只取自由界面的正规模态。为了比较，做出了五种情况：Ⅰ为取各子结构的全部弹性正规模态，即(8,6,10)；Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ 均为只取部分正规模态，它们的模态数分别为(6,5,7)，(4,4,4)，(4,3,5)，(3,3,3)。

约束方程由边界位移、转动的连续条件决定。显然其有四个约束方程。

计算结果列于表 8-1。

由该表可知，当取各子结构全部正规模态时，其结果与全梁整体直接求解的结果一致。若以整体求解为精度标准的话，显而易见，随着所取的模态数目的减少而精度下降。但可以看到，即使每个子结构只取三个模态(两个刚体模态，一个弹性振动模态)，所得频率值的误差也是不大的，而计算工作量要比整体求解少得多。

表 8-1 单位:Hz

模态	直接解	模态综合				
		(8,6,10)*	(6,5,7)	(4,4,4)	(4,3,5)	(3,3,3)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	5.701 6	5.701 6	5.717 1	5.931 3	5.813 5	6.351 7
4	13.084 8	13.084 8	13.089 0	13.303 7	13.591 0	14.072 4
5	21.781 7	21.781 7	21.816 6	22.255 3	22.226 5	23.222 7
6	30.718 0	30.718 0	30.748 4	31.414 4	32.087 0	………
7	39.054 7	39.054 7	39.088 8	40.087 0	41.411 7	………

* 注:(×,×,×)表示三个子结构依次的模态数

第九章　飞行器固有特性分析的一些特殊问题

随着形形色色飞行器的出现，动力固有特性分析也出现许多特殊问题。例如，火箭、导弹虽然基本上近似于一个一维梁系统，但它们往往存在着级间连接与数目较多的分离面（接头），这使得结构的刚度分布、阻尼分布发生变化，给固有特性的精确分析带来困难；大型液体燃料火箭广泛存在着液体晃动问题，它对固有特性有不可忽视的影响；人造卫星经常采用自旋稳定方案，并安装有柔度很大的附件，如太阳能帆板、天线等，构成具有转动的刚体及柔性体的复合结构，使它的固有特性分析更加复杂化。本章对这些问题做一概括介绍。

§9.1　飞行器分离面（接头）对固有特性的影响

大部分火箭、导弹类型的飞行器都具有较多的接头，它们使全弹的刚度分布发生局部扰动，如图 9-1 所示。它使刚度损失可达(30 ～ 40)%，如表 9-1 所示。

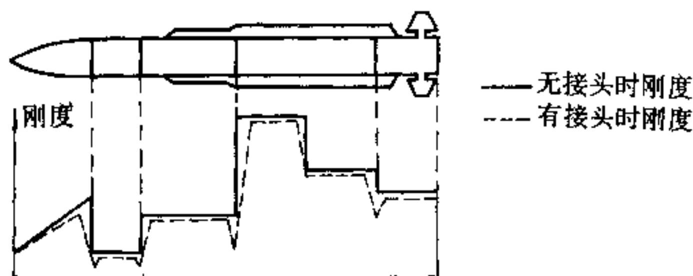


图　9-1

表　9-1

导弹名称	接头数	刚度损失 K	注
“响尾蛇”	4	13%	$K = \frac{K_1 - K_2}{K_1}\%$
近程攻击导弹 SRAM	6	31%	K_1 为无接头时一阶振型广义刚度
中程标准导弹 MR	7	31%	K_2 为有接头时一阶振型广义刚度
远程标准导弹 ER	7	33%	
“不死鸟”	10	49%	

一、对弹体固有特性的影响

1. 使全弹的固有频率下降

由于接头削弱了附近弹体的刚度，同时接头处往往存在空隙，因而它们都使全弹的固有频率降低。影响程度与接头的数量、类型、位置有关。表 9-2 中列举了一些导弹的一阶频率由于接头而引起的下降情况。

表 9-2

导弹名称	接头数	一阶固有频率下降
"响尾蛇"	4	7%
近程攻击导弹 SRAM	6	17%
中程标准导弹 MR	7	17%
远程标准导弹 ER	7	18%
"不死鸟"	10	29%

2. 使全弹的振型发生畸变

接头的存在，改变了刚度分布，必然使振型形状、节点位置发生变化。在控制系统的设计中节点位置是个重要参数，所以，为了精确确定振型，必须考虑接头的响应。图 9-2 所示为某弹前三阶振型受接头影响的变化情况。

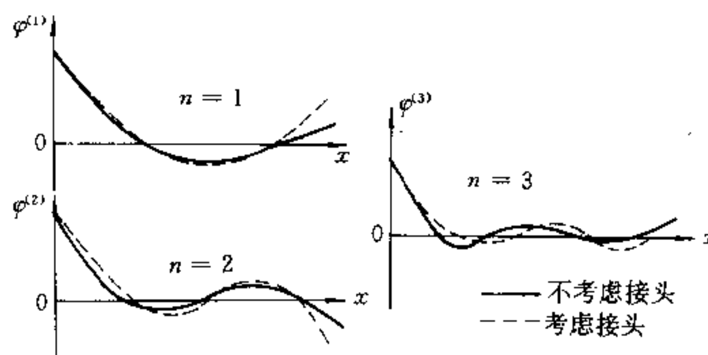


图 9-2

图中 x 为弹体轴向坐标，坐标原点设在弹体头部理论顶点，φ 为振型幅值。应当注意，同样的接头，所处的位置不同影响也不同。一般讲，在导弹弹体中部的接头影响更加突出。

二、分析方法

由于接头种类繁多，而且它的连接情况还受到加工质量、装配质量的影响，因此，精确地用纯分析方法考虑接头进行固有特性计算是困难的，一般都采用实验与分析结合的方法。全弹的计算模型可以选用一维梁式模型或三维壳体模型，接头则可分别处理为集中弯曲弹簧或沿分离面周线分布的弹性组件。处理这类模型的关键是这些弹性件柔度的确定，对于集中弯曲弹

簧，其柔度确定的方法有以下几种。

1. 类比法

参照已有的导弹接头的柔度数据，用相似类比方法，推测所设计的接头的柔度。

2. 经验公式法

Alley 和 Leadbetfer 根据大量实验的统计，归纳出以下经验公式

$$F_i = A_i\left(\frac{20}{D}\right)^3 \tag{9-1}$$

式中 F_i —— 第 i 个接头的弯曲柔度；

D —— 接头处弹身直径(英寸)；

A_i —— 柔度系数，根据接头的不同类型已制成表格供查，如表 9-3 所示。

表 9-3

接头分类	A_i	
	额定值	范围
优	10^{-10}	3×10^{-10}
良	10^{-9}	$3\times10^{-10}\sim3\times10^{-9}$
中	10^{-8}	$3\times10^{-9}\sim3\times10^{-8}$
差	10^{7}	$>3\times10$

此经验公式是以英制给出的，使用时应予注意。

3. 实验测定法

当已具有实体结构时，可通过静力实验或动力实验得到各个接头实际柔度。不过，实验中应注意消除弹体弯曲的影响。

4. 其他方法

也可采用有限元或最佳拟合的分析方法来确定接头的柔度，不过方法复杂而精度并不理想。

总之，随着飞行器对固有频率、振型、振型斜率的数量与精度要求日益提高，接头产生的影响必须予以考虑。由于接头类型较多，单纯的分析方法尚未完善，目前主要依靠实验来确定特性参量 —— 柔度。将所得柔度参量代入系统模型，即可计得较为精确的全弹固有特性。

§9.2 具有旋转部件的飞行器的固有特性分析特点

近一二十年来人造地球卫星迅速发展，形成了一种别具特色的飞行器。为保持卫星的姿态稳定，采取了各种姿态稳定方案，其中以自旋稳定最简单、最普遍。这样，使卫星结构有一部分为定轴旋转部件。又由于能源、通讯、操纵的要求，在卫星上设有太阳能帆板与天线等，它们均为柔度很大的构件。整个卫星形成了能旋转的刚性件与柔性较大的弹性件的混合构造物，如图 9-3 所示。为了分析卫星的动态响应，往往需要首先掌握固有特性。为此，必须掌握根部固定基座处于旋转状态下的悬臂构件的固有特性分析方法。

理论分析与经验都表明，旋转带来的影响不容忽视。它不仅使固有频率、振型发生变化，而

且使结构的动态品质发生变化，在一定条件下会出现丧失动稳定性问题。

一、研究的历史与现状

关于旋转对固有特性影响的研究早在40到50年代就开始了。1945年，R. T. Yntema应用瑞雷能量法首先得到具有实际价值的结果。由于当时主要对象是对发动机或直升飞机的叶片的分析，因此未考虑大变形。随着宇航事业的发展，近年来对这一课题的研究再起高潮。陀螺系统动力分析的数学模型以P. W. Likins的研究为代表，他于1972—1973年对三种模型(弹性连续体模型，分布质量有限元模型，集中质量模型)导出了相应的运动方程。1974年，L. Meirovitch对旋转构件提出的特殊特征问题作了系统性研究，导出了将陀螺系统复杂特征值问题转化为一般广义特征值问题及标准特征值问题的具体方法，从而使旋转结构的固有特性分析与古典的非旋转结构固有特性分析建立起联系。

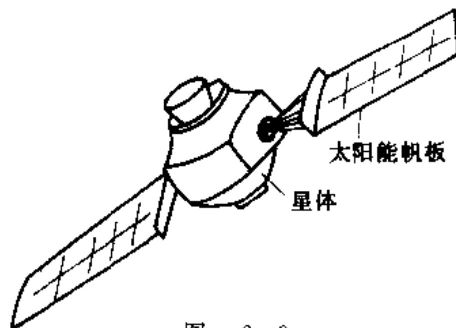


图 9-3

二、解法要点

以固定于刚体上的微振旋转梁为例，如图9-4所示。忽略剪切变形、转动惯量及轴向变形形的影响。梁沿径向与刚体相连，但与刚体轴的Y轴呈θ夹角，刚体以Ω_Z常角速度旋转，其他如图9-4所示。

任一点i的变形后位置矢量(如图9-5所示)可写为

$$\dot{\gamma}_i = p_i + u_i \tag{9-2}$$

式中 p_i—— 点i变形前位置矢量；

u_i—— 弹性动位移矢量。

则得速度矢量为：

$$\gamma_i = \Omega \times (p_i + u_i) + u_i \tag{9-3}$$

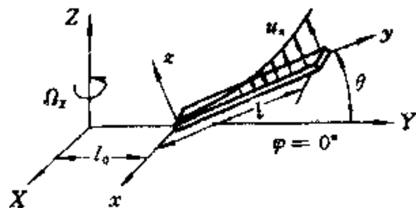


图 9-4

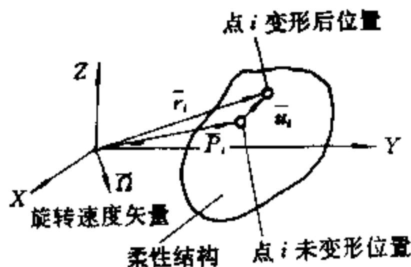


图 9-5

式中 Ω—— 坐标系XYZ旋转角速度矢量。

由此不难导出相应的坐标分量：$\dot{\gamma}_x, \dot{\gamma}_y, \dot{\gamma}_z$。

对此均匀梁可假定其动挠曲形状为

$$u_x(y,t) = q_x(t)\left[3\left(\frac{y}{l}\right)^2 - \left(\frac{y}{l}\right)^3\right] \tag{9-4}$$

$$u_z(y,t) = q_z(t)\left[3\left(\frac{y}{l}\right)^2 - \left(\frac{y}{l}\right)^3\right] \tag{9-5}$$

式中　q_x, q_z—— 广义坐标。

这样，梁的总动能为

$$T = \frac{1}{2}\rho A\int_0^l (\dot{\gamma}_x^2 + \dot{\gamma}_y^2 + \dot{\gamma}_z^2)\mathrm{d}y \tag{9-6}$$

式中　ρ —— 梁的质量密度；

　　A —— 横断面积。

弯曲应变能为

$$U = \frac{1}{2}\int_x^l \left[EI_z\left(\frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 + EI_x\left(\frac{\mathrm{d}^2 u_z}{\mathrm{d}y^2}\right)^2\right]\mathrm{d}y \tag{9-7}$$

由于离心力场而产生的力势为

$$U_c = \frac{1}{2}\int_0^l\int_0^y\left[\left(\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}F_c \tag{9-8}$$

式中　$\mathrm{d}F_c$ —— 沿 y 轴的微元体离心力；

　　ξ —— 沿 y 轴的辅助变量。

将(9－6)～(9－8)式代入拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial}{\partial q_r}(U + U_c) = 0 \tag{9-9}$$

式中　q_r 为 q_x 或 q_z。

解出后，得运动方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}_G + \boldsymbol{K}_c)\boldsymbol{q} = 0 \tag{9-10}$$

式中　$\boldsymbol{q}$ 为广义坐标 $\boldsymbol{q}_x, \boldsymbol{q}_z$ 构成的广义坐标列阵；

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9-11}$$

为质量矩阵；

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_x\sin\theta \\ -2\Omega_x\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{9-12}$$

是旋转引起的哥氏加速度的影响矩阵；

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \omega_{x_0}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{z_0}^2 \end{bmatrix} \tag{9-13}$$

为梁的弹性刚阵；

$$\boldsymbol{K}_c = \Omega_x^2\begin{bmatrix} 0 & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{9-14}$$

为向心加速度影响矩阵；

$$\boldsymbol{K}_G = \Omega_x^2\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{9-15}$$

为离心力场的影响矩阵；其中 λ 为离心力参数，它与 $\theta, l_0/l$ 相关。

由(9－10)～(9－15)式可知，M,K,K_G,K_c 均为对称阵，而 D 阵为斜对称阵。

方程(9－10)可改写为一阶状态方程。

令
$$X=\begin{bmatrix}\dot{q}\\q\end{bmatrix} \quad K_0=K+K_G+K_c$$

则(9－10)与下列状态方程等价

$$\begin{bmatrix}M & 0\\0 & K_0\end{bmatrix}\dot{X}+\begin{bmatrix}D & K_0\\-K_0 & 0\end{bmatrix}X=0 \tag{9-16}$$

简写为

$$J\dot{X}+GX=0 \tag{9-17}$$

对应特征方程为

$$\det(\lambda J+G)=0 \tag{9-18}$$

式中 J 为对称阵，G 为斜对称阵。

显然，旋转梁的固有特性分析归结为一个特殊特征值问题。它为一个对称阵、一个斜对称阵的特征值问题，不能直接使用一般古典的特征值解法。不过，可以证明此情况的特征值为纯虚数，而对应特征向量为复向量，而且均以共轭对出现。因此我们可以设特征值为

$$\lambda_r=\mathrm{i}\omega_r \tag{9-19}$$

式中　ω_r—— 固有频率。

特征向量为
$$X_r=Y_r+\mathrm{i}Z_r \tag{9-20}$$

将它们代入特征值方程，则可将(9－18)式分解为两个古典的广义特征值问题

$$\omega_r^2JY_r=QY_r \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{9-21}$$

$$\omega_r^2JZ_r=QZ_r \quad (r=1,2,\cdots,n) \tag{9-22}$$

式中
$$Q=-GJ^{-1}G=G^{\mathrm{T}}J^{-1}G \tag{9-23}$$

(9－21)、(9－22)式广义特征值问题还可进一步变为标准特征值问题

$$\omega_r^2Y_r'=Q'Y_r' \tag{9-24}$$

$$\omega_r^2Z_r'=Q'Z_r' \tag{9-25}$$

式中
$$Y_r'=J^{1/2}Y_r \tag{9-26}$$

$$Z_r'=J^{1/2}Z_r \tag{9-27}$$

$$Q'=J^{-1/2}G^{\mathrm{T}}J^{-1}GJ^{-1/2} \tag{9-28}$$

不过这时要求 $J^{1/2},J^{-1/2}$ 存在。可以证实，只要 J 为正定，这个条件是满足的。

利用(9－21)、(9－22)式求解时，可采用一般非旋转结构的广义特征值问题解法。利用(9－26)、(9－27)式求解时，可采用非旋转结构的标准特征值问题解法。

三、旋转对固有特性的影响

包括有旋转部件的系统，其动力分析的复杂性来源于旋转速度与弹性变形的耦合，由于旋转而使加速度复杂化。它不仅包括有一般弹性变形的惯性加速度，而且还有哥氏加速度和向心加速度。再者，由于旋转产生的离心力场使旋转结构内部负载，从而使结构刚度变化。(9－15)式给出的 K_G 阵便是引入的刚度修正阵，一般称它为几何刚度。另外一个特性是，旋转构件的特征值为纯虚数，而特征向量为复向量。

旋转对频率、振型的影响在低阶较为突出，影响大小与弹性和刚体之间相对固定位置以及

与旋转速度有关。图 9－6、9－7、9－8、9－9 表示了这些影响情况。

由图可知，离心力场使频率上升，而向心加速度则使频率下降。

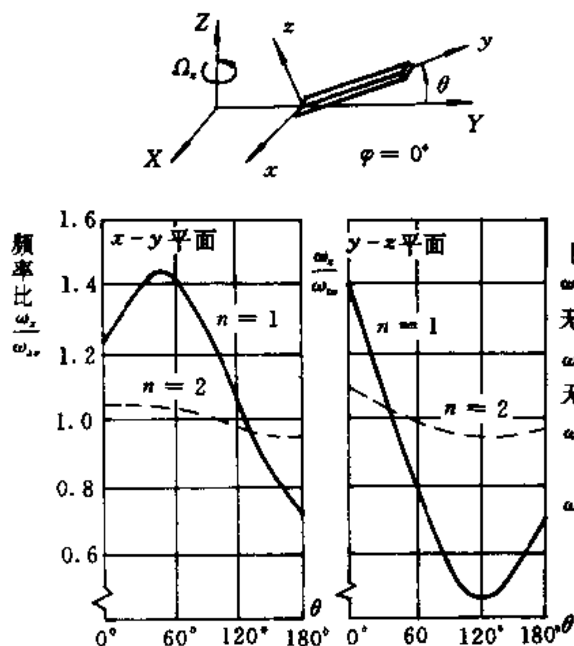


图　9－6　　　　　　　　　　　　图　9－7

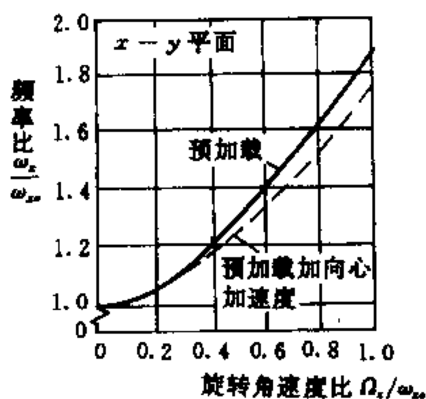


图　9－8

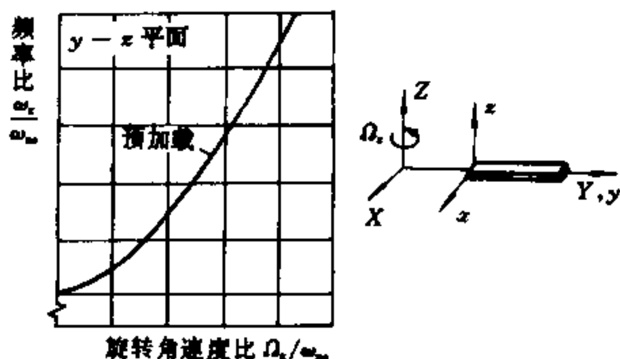


图　9－9

§9.3　贮箱中液体晃动对固有特性的影响

随着大型发射飞行器的出现，贮箱中液体晃动对于飞行器动态特性的影响日益突出。这是由于在大型发射器中推进剂所占质量部分的比重大大提高，推进剂的动态特性对全系统起着重要作用。另外，大型发射器结构固有频率很低（可达几赫），以至于液体晃动频率、结构弹性固

有频率以及飞行器刚体旋转控制频率互相靠近。控制系统与晃动质量易于发生耦合，从而使控制系统饱和，导致控制失灵。或者，由于耦合日益加剧的液体晃动在结构上产生过大的力与力矩，造成结构破坏。所以，对晃动质量进行有效的分析，是防止耦合振动、准确确定飞行器全系统的固有特性所不可缺少的条件。

一、问题的特点

不晃动的液体与固体结构质量的动力特性并无区别，而具有自由液面的贮箱，由于阵风作用、飞行姿态变化、姿态控制力冲击、级间分离以及飞行器弹性变形等情况而导致液体的一部分以一定的频率晃动，成为飞行器内部动态特征突出的一个环节。晃动频率及晃动激烈程度均与下列因素有关：

（1）容器形状；

（2）推进剂性质；

（3）阻尼隔板设置情况；

（4）推进剂液面高度；

（5）加速度场的情况。

在飞行过程中，随着燃料不断燃烧，推进剂液面情况不断发生变化，从而对系统固有特性的影响也随之变化。这是本问题的主要特点。一般说来，为了掌握整个飞行过程的固有特性情况，就要分析各个不同的推进剂燃烧阶段的频率与振型。

另外一个特点是，一般只需考虑低阶情况，特别是一阶情况。因为经研究指出，对于圆柱壳体，二阶晃动质量仅为一阶晃动质量的 3%，而且在高阶情况下液体内部将产生紊乱的扰动，使阻尼激增，故二阶以上可不予考虑。

二、推进剂晃动频率的确定

按照讨论对象的实际情况，为了确定其晃动特性，必须研究壳体约束条件下的流体动力学问题，许多学者已经做了大量有益的工作。但是，对每个飞行器均按流体动力学方法进行频率计算是件很烦杂的工作。所以，工程上常采用当量变换的方法，在对壳体壁作用的力与力矩相等、频率相当的条件下，将液体晃动模型等价代换为机械力学模型。这些模型的建立需要流体动力学的精确分析。一旦建立了当量机械模型，对于各种飞行器的液体晃动问题，可根据它们的液体参量、飞行状态参量、飞行器参量很容易地确定出当量机械模型参量，从而确定出晃动频率。一般采用的液体侧向晃动当量机械模型有两种。

1. 弹簧质量模型

根据壳体半径及液面高度，可按流体动力学分析导得的当量公式确定贮箱中液体固定质量 m_0、晃动质量 m_1，晃动质量的运动受到弹簧与阻尼器的约束，其模型如图 9-10 所示。

模型中阻尼系数 C、弹簧刚度 K_1 都按流体动力学导得的当量公式确定，当阻尼较小时，阻尼的作用可以忽略。

2. 自由摆模型

从晃动的物理现象来看，将它等价为一个当量摆是无可非异的。此模型如图 9-11 所示，其中的 $m_1, m_0, l_1, l_0, l_T, \varphi_1$ 等参量也是由流体动力学分析得到的当量公式来确定。

进行这种模型代换后，液体晃动问题的处理就与结构系统的其他部件的处理方式完全相